

УДК 517.98

Е.Н. Ашурова, В.Л. Островський*(Інститут математики НАН України, Київ)***Про зображення “all but two” алгебр****work1991@ukr.net, vo@imath.kiev.ua**

In this paper, we study representations of the $*$ -algebra generated by two projections $P_1 \perp P_2$ and n more projections $Q_1 + \dots + Q_n = I$.

У даній роботі ми вивчаємо зображення $*$ -алгебри, породженої двома проекторами $P_1 \perp P_2$ та ще n проекторами $Q_1 + \dots + Q_n = I$.

Вступ

У ряді робіт з теорії інтегральних операторів (див, наприклад, [1] та наведену там бібліографію) вивчаються властивості C^* -алгебри, породженої наборами ортопроекторів P, Q_1, \dots, Q_n у деякому гільбертовому просторі H , які задовольняють співвідношення $Q_1 + \dots + Q_n = I$, а також більш загальними наборами, ортопроекторів $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$ в H , які задовольняють співвідношення

$$P_j \perp P_k, \quad k \neq j, \quad Q_1 + \dots + Q_n = I \quad (1)$$

(див. [2, 3]). У наведених роботах вивчались властивості C^* -алгебри, породженої незвідними наборами ортопроекторів, для яких образ проектора P чи образи проекторів P_1, \dots, P_m є одновимірними просторами. Саме такі набори виникають у конкретних реалізаціях локальних алгебр, пов'язаних з операторами Тепліца з кусково гладенькими символами. Зокрема, показано, що відповідна C^* -алгебра вкладається в алгебру неперервних матричнозначних функцій на певній множині параметрів. У випадку $m = 1$ множина параметрів c_1, \dots, c_n , що індексують незвідні зображення, є симплексом

$$c_1 + \dots + c_n = 1, \quad c_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

і розклад довільного зображення на незвідні задається спектральним розкладом відповідного комутативного набору самоспряжених операторів C_1, \dots, C_n .

Проте при $m \geq 2$ подібного опису множини, що параметризує незвідні зображення, наведено не було. Дослідженню питання про параметризацію незвідних зображень таких алгебр у випадку $m = 2$ присвячено дану роботу.

Зручним інструментом дослідження наборів ортопроекторів у гільбертовому просторі є операторна матриця Грама (див. [4]). У першому розділі викладено конструкцію операторної матриці Грама та її основні властивості, що використовуються у подальшому.

Другий розділ присвячено вивченню загальних властивостей наборів ортопроекторів з умовами (1) при $m = 2$. Зокрема, показано, що за умови, що кожна пара проекторів (P_j, Q_k) , $j = 1, 2$, $k = 1, \dots, n$, знаходиться у загальному положенні, задача опису з точністю до унітарної еквівалентності наборів (1), $m = 2$, еквівалентна до задачі опису блочних 2×2 додатних самоспряжених матриць A_1, \dots, A_n з умовою

$$A_1 + \dots + A_n = I.$$

Ця умова є природним аналогом умови (2) у випадку $m = 1$.

Відомо, що навіть у випадку $m = 1$, $n \geq 3$, задача опису наборів ортопроекторів з умовами (1) з точністю до унітарної еквівалентності є надзвичайно складною (*-дикою). У третьому розділі досліджуються набори з додатковими комутаційними співвідношеннями, які еквівалентні умові, що у незвідному зображенні образи ортопроекторів P_1, P_2 одновимірні. У цьому випадку задача опису незвідних наборів є ручною. Основний результат розділу — теорема 4, яка описує комутативний набір нормальних операторів, спектральний розклад яких дає розклад набору на незвідні набори.

1. Попередні відомості

Нагадаємо конструкцію операторної матриці Грама (див. [4]) та її властивості, що будуть потрібні для подальшого викладу.

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір та P_1, \dots, P_n — набір ортопроекторів у H . Нехай $H_j = \text{Im } P_j$, $j = 1, \dots, n$.

Позначимо $T_j: H_j \rightarrow H$ ізометричні вкладення, такі що $T_j T_j^* = P_j$, $T_j^* T_j = I_{H_j}$. Розглянемо простір

$$\mathcal{H} = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n \quad (3)$$

і оператор $J = (T_1, \dots, T_n): \mathcal{H} \rightarrow H$.

Означення 1. Оператор $G = J^* J: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ називають операторною матрицею Грама системи підпросторів $(H; H_1, \dots, H_n)$.

Блочні елементи оператора G у розкладі (3) мають вигляд $(T_j^* T_k)_{j,k=1}^n$. У випадку, коли усі проектори P_j одновимірні, маємо $H_j = \mathbb{C}\langle e_j \rangle$, $\|e_j\| = 1$ і G — звичайна матриця Грама системи векторів (e_1, \dots, e_n) .

Операторна матриця Грама G системи підпросторів $(H; H_1, \dots, H_n)$ має наступні властивості:

1. $G = G^*$, $G \geq 0$;
2. Діагональні елементи G — одиничні оператори, $G_{jj} = I_{H_j}$, $j = 1, \dots, n$;
3. $G_{jk} = 0 \Leftrightarrow H_j \perp H_k$.

У просторі \mathcal{H} розглянемо проектори Q_1, \dots, Q_n на компоненти ортогональної суми, $\text{Im } Q_j = H_j$, $j = 1, \dots, n$. Тоді $Q_1 + \dots + Q_n = I$ і $Q_j G Q_j = Q_j$.

Твердження 1 ([4]). Нехай $G \geq 0$ — невід'ємний оператор у деякому гільбертовому просторі \mathcal{H} , і нехай Q_1, \dots, Q_n — ортопроектори в \mathcal{H} , для яких $Q_1 + \dots + Q_n = I$, та $Q_j G Q_j = Q_j$, $j = 1, \dots, n$. Тоді G є операторною матрицею Грама деякого набору проекторів P_1, \dots, P_n .

Теорема 1 ([4]). Набори (P_1, \dots, P_n) і (P'_1, \dots, P'_n) унітарно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли набори (G, Q_1, \dots, Q_n) і (G', Q'_1, \dots, Q'_n) унітарно еквівалентні.

Теорема 2. Нехай для набору ортопроекторів (P_1, \dots, P_n) лінійна оболонка їх образів щільна у просторі H . Набір (P_1, \dots, P_n) в H незвідний тоді і тільки тоді, коли набір (G, Q_1, \dots, Q_n) в \mathcal{H} незвідний.

Доведення. Нехай оператор K в H комутує з усіма проекторами P_1, \dots, P_n , тобто $K P_i = P_i K$, $i = 1, \dots, n$. Розглянемо оператори

$K_i = T_i^* K T_i$ і позначимо через \mathcal{K} оператор у \mathcal{H} , що має вигляд $\mathcal{K} = \text{diag}(K_1, \dots, K_n)$.

Оскільки у розкладі (3) $Q_j = \text{diag}(0, \dots, I_j, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, n$, то $Q_j \mathcal{K} = \mathcal{K} Q_j$. Покажемо, що $G\mathcal{K} = \mathcal{K}G$. Оскільки блочні елементи матриці Грама мають вигляд $(T_j^* T_k)_{j,k=1}^n$, то рівність $G\mathcal{K} = \mathcal{K}G$ рівносильна виконанню умов $K_j T_j^* T_k = T_j^* T_k K_k$, $j, k = 1, \dots, n$. Справді,

$$\begin{aligned} K_j T_j^* T_k &= T_j^* K T_j T_j^* T_k = T_j^* K P_j T_k = T_j^* P_j K T_k \\ &= T_j^* T_j T_j^* K T_k = T_j^* K T_k, \\ T_j^* T_k K_k &= T_j^* T_k T_k^* K T_k = T_j^* P_k K T_k = T_j^* K P_k T_k \\ &= T_j^* K T_k T_k^* T_k = T_j^* K T_k. \end{aligned}$$

Якщо набір (G, Q_1, \dots, Q_n) незвідний, то за лемою Шура $\mathcal{K} = \lambda I$, і $T_j^* K T_j = \lambda I_{H_j}$. Отже, $Kf = \lambda f$ для векторів f з лінійної оболонки образів проєкторів P_1, \dots, P_n . Але якщо лінійна оболонка підпросторів H_j , $j = 1, \dots, n$, щільна в H , то $K = \lambda I$, і набір проєкторів (P_1, \dots, P_n) незвідний.

Покажемо тепер, що з незвідності набору (P_1, \dots, P_n) випливає незвідність набору (G, Q_1, \dots, Q_n) . Нехай оператор \mathcal{K} у \mathcal{H} комутує з Q_1, \dots, Q_n, G . Розглянемо простір $H' = \overline{\text{Im } G}$ та оператор вкладення $T: H' \rightarrow \tilde{H}$, тоді $T^* T = I_{H'}$, $T T^*$ — проєктор на замикання образу G в \mathcal{H} . Оператори $P'_j = T^* \sqrt{G} Q_j \sqrt{G} T$ є ортопроєкторами, причому за умови $\sum_{j=1}^n \overline{H_j} = H$ набір проєкторів $(P'_j)_{j=1}^n$ в H' унітарно еквівалентний початковому набору $(P_j)_{j=1}^n$ в H (див. [4]).

Розглянемо оператор $K' = T^* \mathcal{K} T$, $K': H' \rightarrow H'$. Покажемо, що K' комутує з $(P'_j)_{j=1}^n$. Справді, оскільки $G = T T^* G = G T T^*$,

$$\begin{aligned} K' P'_j &= T^* \mathcal{K} T T^* \sqrt{G} Q_j \sqrt{G} T = T^* \mathcal{K} \sqrt{G} Q_j \sqrt{G} T \\ &= T^* \sqrt{G} Q_j \sqrt{G} \mathcal{K} T = T^* \sqrt{G} Q_j \sqrt{G} T T^* \mathcal{K} T = P'_j K'. \end{aligned}$$

Нехай набір (P_1, \dots, P_n) незвідний, тоді унітарно еквівалентний до нього набір (P'_1, \dots, P'_n) теж незвідний, і за лемою Шура $K' = \lambda I$. Оскільки $G = G T T^*$, маємо

$$\mathcal{K} G = \mathcal{K} G T T^* = G \mathcal{K} T T^* = G T T^* \mathcal{K} T T^* = G T K' T^* = \lambda G,$$

тоді, оскільки для довільного $j = 1, \dots, n$ виконується $Q_j \mathcal{K} = \mathcal{K} Q_j$ та $Q_j G Q_j = Q_j$, отримуємо

$$Q_j \mathcal{K} Q_j = Q_j \mathcal{K} Q_j G Q_j = Q_j \mathcal{K} G Q_j = \lambda Q_j G Q_j = \lambda Q_j.$$

Оскільки \mathcal{K} комутує з Q_j , то $Q_j \mathcal{K} Q_k = 0$ при $j \neq k$. Тоді

$$\mathcal{K} = \sum_{j=1}^n Q_j \tilde{K} Q_j = \lambda \sum_{j=1}^n Q_j = \lambda I,$$

отже, набір (G, Q_1, \dots, Q_n) незвідний. \square

2. Матриця Грама для “all but two” набору проєкторів

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір. У даній роботі ми вивчаємо задачу опису з точністю до унітарної еквівалентності наборів проєкторів $Q_1, \dots, Q_n, P_1, P_2$, таких, що

$$\sum_{i=1}^n Q_i = I, \quad P_1 \perp P_2. \quad (4)$$

Розглянемо ізометричні вкладення $S_j: \text{Im } Q_j \rightarrow H$, $j = 1, \dots, n$, для них маємо $S_j^* S_j = I_{\text{Im } Q_j}$ та $S_j S_j^* = Q_j$. Аналогічно, розглянемо ізометричні вкладення $T_i: \text{Im } P_i \rightarrow H$, $i = 1, 2$, для яких $T_i^* T_i = I_{\text{Im } P_i}$, $T_i T_i^* = P_i$.

Оскільки $P_1 \perp P_2$, $Q_i \perp Q_j$, $i \neq j$, то $T_1^* T_2 = 0$, $T_2^* T_1 = 0$, $S_i^* S_j = 0$, $i \neq j$. Отже, блочне представлення матриці Грама для набору проєкторів $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$ має вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} I & 0 & T_1^* S_1 & \dots & T_1^* S_n \\ 0 & I & T_2^* S_1 & \dots & T_2^* S_n \\ S_1^* T_1 & S_1^* T_2 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_n^* T_1 & S_n^* T_2 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}.$$

Позначимо $H_1 = \text{Im } P_1$, $H_2 = \text{Im } P_2$, $H_0 = H_1 \oplus H_2$ і проєктори P'_1 та P'_2 у H_0 на підпростори H_1 та H_2 . Зауважимо, що оператор

$$T_0 = (T_1, T_2): H_1 \oplus H_2 \rightarrow H$$

є ізометричним вкладенням H_0 в H , причому

$$P'_i = T_0^* P_i T_0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

тобто проектори P'_i є зружженнями проекторів P_i на підпростір H_0 .

Розглянемо оператори

$$\begin{aligned} B_j &= \begin{pmatrix} T_1^* S_j \\ T_2^* S_j \end{pmatrix} : \text{Im } P_j \rightarrow H_0, \\ A_j &= B_j B_j^* : H_0 \rightarrow H_0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

Наступні твердження встановлюють зв'язок між наборами $(P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n)$ в H та наборами $(P'_1, P'_2, A_1, \dots, A_n)$ в H_0 .

Твердження 2. *Набір операторів $(P'_1, P'_2, A_1, \dots, A_n)$ в H_0 має такі властивості.*

1. $P'_1 + P'_2 = I_{H_0}$, $A_1 + \dots + A_n = I_{H_0}$;
2. Якщо набори ортопроекторів $(P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n)$ та $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n)$ унітарно еквівалентні, то відповідні набори операторів $(P'_1, P'_2, A_1, \dots, A_n)$ та $(\tilde{P}'_1, \tilde{P}'_2, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$ унітарно еквівалентні.

Доведення. 1. Справді, $P'_1 + P'_2 = I_{H_0}$ за побудовою. Також маємо

$$\begin{aligned} A_1 + \dots + A_n &= B_1 B_1^* + \dots + B_n B_n^* \\ &= \begin{pmatrix} T_1^* (S_1 S_1^* + \dots + S_n S_n^*) T_1 & T_1^* (S_1 S_1^* + \dots + S_n S_n^*) T_2 \\ T_2^* (S_1 S_1^* + \dots + S_n S_n^*) T_1 & T_2^* (S_1 S_1^* + \dots + S_n S_n^*) T_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1^* (Q_1 + \dots + Q_n) T_1 & T_1^* (Q_1 + \dots + Q_n) T_2 \\ T_2^* (Q_1 + \dots + Q_n) T_1 & T_2^* (Q_1 + \dots + Q_n) T_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1^* T_1 & T_1^* T_2 \\ T_2^* T_1 & T_2^* T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I_{H_0}. \end{aligned}$$

2. Нехай набір проекторів $(P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n)$ у H унітарно еквівалентний набору проекторів $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n)$ у \tilde{H} , тобто існує унітарний оператор $U: H \rightarrow \tilde{H}$ такий, що $\tilde{P}_i = U P_i U^*$, $\tilde{Q}_j = U Q_j U^*$, $i = 1, 2$; $j = 1, \dots, n$. Нехай G та \tilde{G} — відповідні матриці Грама. Тоді існує блочно діагональна унітарна матриця $\mathcal{U} = \text{diag}(V_1, V_2, U_1, \dots, U_n)$, яка

сплітає G та \tilde{G} , $\tilde{G} = UGU^*$. Тоді

$$\begin{aligned} B_j &= \begin{pmatrix} T_1^* S_j \\ T_2^* S_j \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_j = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1^* \tilde{S}_j \\ \tilde{T}_2^* \tilde{S}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 T_1^* S_j U_j^* \\ V_2 T_2^* S_j U_j^* \end{pmatrix}, \\ A_j &= B_j B_j^* = \begin{pmatrix} T_1^* S_j S_j^* T_1 & T_1^* S_j S_j^* T_2 \\ T_2^* S_j S_j^* T_1 & T_2^* S_j S_j^* T_2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_j &= \tilde{B}_j \tilde{B}_j^* = \begin{pmatrix} V_1 T_1^* S_j S_j^* T_1 V_1^* & V_1 T_1^* S_j S_j^* T_2 V_2^* \\ V_2 T_2^* S_j S_j^* T_1 V_1^* & V_2 T_2^* S_j S_j^* T_2 V_2^* \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Отже, $\tilde{A}_j = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} A_j \begin{pmatrix} V_1^* & 0 \\ 0 & V_2^* \end{pmatrix} = V A_j V^*$, $j = 1, \dots, n$, $V = \begin{pmatrix} V_1^* & 0 \\ 0 & V_2^* \end{pmatrix}$.

Оскільки проектори $P'_1, P'_2, \tilde{P}'_1, \tilde{P}'_2$ мають блочно діагональний вигляд, то також маємо $\tilde{P}'_1 = V P'_1 V^*$, $\tilde{P}'_2 = V P'_2 V^*$. \square

Зауваження 1. *Обернене до п.2 твердження невірне: неважко навести приклади унітарно нееквівалентних наборів $(P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n)$ та $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n)$, які породжують один і той же набір $(P'_1, P'_2, A_1, \dots, A_n)$.*

Справді, нехай проектори $(P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n)$ в H задовольняють (4) і породжують згідно (5) та (6) набір $(P'_1, P'_2, A_1, \dots, A_n)$. Візьмемо довільний простір \hat{H} та довільний ортогональний розклад одиниці $\hat{Q}_1 + \dots + \hat{Q}_n = I$ в \hat{H} . Покладемо

$$\hat{H} = H \oplus \hat{H}, \quad \tilde{Q}_j = Q_j \oplus \hat{Q}_j, \quad \tilde{P}_i = P_i \oplus 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2.$$

Тоді набір $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n)$ задовольняє (4), породжує той самий набір $(P'_1, P'_2, A_1, \dots, A_n)$, проте у випадку скінченновимірного H завідомо не унітарно еквівалентний до набору $(P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n)$.

Покажемо, що за певних додаткових умов є взаємно однозначна відповідність між “all but two” наборами ортопроекторів та наборами блочних 2×2 невід’ємних матриць з одиничною сумою.

Нагадаємо, що підпростори $E \subset H$ і $K \subset H$ (проектори на підпростори $E \subset H$ і $K \subset H$) знаходяться у загальному положенні, якщо $E \cap K = 0$, $E \cap K^\perp = 0$, $E^\perp \cap K = 0$.

Теорема 3. *Нехай $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$ — набір ортопроекторів в H , що задовольняють (4), A_1, \dots, A_n — невід’ємні самоспряжені оператори, побудовані згідно (6), і нехай кожна з пар проекторів $(P_0 = P_1 + P_2, Q_j)$, $j = 1, \dots, n$, знаходяться у загальному положенні.*

Тоді розмірність усіх проекторів Q_j однакова і дорівнює розмірності проектора P_0 , $\dim \operatorname{Im} P_0 = \dim \operatorname{Im} Q_j$, $j = 1, \dots, n$, причому $\ker A_j = 0$, тобто оператор A_j має (взагалі кажучи, необмежений) обернений.

Навпаки, нехай у деякому просторі H_0 задано проектори P'_1, P'_2 , та невід'ємні самоспряжені оператори A_1, \dots, A_n , для яких

$$P'_1 + P'_2 = I, \quad A_1 + \dots + A_n = I, \quad \ker A_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тоді існує єдиний з точністю до унітарної еквівалентності набір ортопроекторів $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$, що задовольняють (4), для якого кожну з пар проекторів $(P_0 = P_1 + P_2, Q_j)$, $j = 1, \dots, n$, знаходяться у загальному положенні, і який задає проектори P'_1, P'_2 , та оператори A_1, \dots, A_n формулами (5) та (6).

Доведення. Для фіксованого j розглянемо пару проекторів (P_0, Q_j) . За спектральною теоремою для пари проекторів

$$\begin{aligned} H &= H_{00} \oplus H_{01} \oplus H_{10} \oplus H_{11} \oplus (H_+ \oplus H_+) \\ P_0 &= 0 \oplus 0 \oplus I \oplus I \oplus \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ Q_j &= 0 \oplus I \oplus 0 \oplus I \oplus \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де C — самоспряжений оператор в H_+ , $0 < C < I$, $S = \sqrt{1 - C^2}$. Оскільки проектори P_0 і Q_j знаходяться у загальному положенні, то $H_{01} = H_{10} = H_{11} = 0$, отже $H = H_{00} \oplus (H_+ \oplus H_+)$ і проектори P_0 і Q_j мають вигляд:

$$P_0 = 0 \oplus \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \oplus I \oplus 0, \quad Q_j = 0 \oplus \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix},$$

причому образи цих проекторів ізоморфні H_+ , оскільки $\ker C = 0$.

Покажемо, що $\ker A_j = 0$. Позначимо $H_0 = \operatorname{Im} P_0$, і розглянемо ізометричне вкладення $T_0 = (T_1, T_2): H_0 \rightarrow H$, тоді $B_j^* = (S_j^* T_1, S_j^* T_2) = S_j^* T_0$. Оскільки $A_j = B_j B_j^* = T_0^* Q_j T_0$ і у розкладі $H = H_{00} \oplus H_+ \oplus H_+$ маємо блочне представлення $T_0^* = (0, I, 0)$, в результаті отримаємо $A_j = C^2$, $\ker C = 0$. Звідси, зокрема, випливає, що $\ker B_j^* = 0$. Подібними міркуваннями можна також показати, що $\ker B_j = 0$, тобто оператор B_j оборотний.

Для набору операторів $(P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n)$ матриця Грама у просторі $H_0^{\oplus n+1}$ має вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} I & B_1 & \dots & B_n \\ B_1^* & I & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ B_n^* & 0 & & I \end{pmatrix}.$$

Оскільки оператор B_j має обернений, то в полярному розкладі $B_j = A_j U_j$, $A_j \geq 0$, оператор U_j — унітарний. Розглянемо унітарну матрицю $U = \text{diag}(I, U_1, U_2, \dots, U_n)$. Тоді за теоремою 1

$$UGU^* = \begin{pmatrix} I & \sqrt{A_1} & \dots & \sqrt{A_n} \\ \sqrt{A_1^*} & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{A_n^*} & 0 & \dots & I \end{pmatrix}.$$

є матрицею Грама унітарно еквівалентного набору ортопроекторів, тобто вихідний набір $(P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n)$ однозначно з точністю до унітарної еквівалентності визначається операторами $P'_1, P'_2, A_1, \dots, A_n$ в H_0 .

Нехай тепер у деякому просторі H_0 задано проектори P'_1, P'_2 , та невід'ємні самоспряжені оператори A_1, \dots, A_n , для яких

$$P'_1 + P'_2 = I, \quad A_1 + \dots + A_n = I, \quad \ker A_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

У просторі $H_0^{\oplus n+1}$ розглянемо оператор G , блочна структура якого має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} I & \sqrt{A_1} & \dots & \sqrt{A_n} \\ \sqrt{A_1} & I & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \sqrt{A_n} & 0 & & I \end{pmatrix}.$$

Неважко помітити, що $G \geq 0$. Справді, безпосередня перевірка з врахуванням умови $\sum_{j=1}^n A_j = I$ показує, що вектори виду $(\pm x, \sqrt{A_1}x, \dots, \sqrt{A_n}x)$, $x \in H_0$, є власними векторами оператора G з власними значеннями 0 та 2, а для довільного вектора x , ортогонального до векторів такого виду, маємо $x = (0, x_1, \dots, x_n)$, $\sum_{j=1}^n \sqrt{A_j}x_j = 0$, і $Gx = x$. Таким чином, спектр G складається з точок 0, 1, 2.

За твердженням 1 G є матрицею Грама деякого набору (P_0, Q_1, \dots, Q_n) , причому розклад $I = P'_1 + P'_2$ задає розклад в ортогональну суму $P_0 = P_1 + P_2$. Проектори P_0 та Q_j знаходяться у загальному положенні, оскільки $\ker A_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$. \square

Зауваження 2. Нехай набір проекторів $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$ задовольняє (4), причому проектори $P_0 = P_1 + P_2$ та Q_j знаходяться у загальному положенні, $j = 1, \dots, n$. Тоді набір операторів

$$P_j Q_k P_l, \quad j, l = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n,$$

дозволяє відновити початковий набір $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$ з точністю до унітарної еквівалентності.

Доведення. Розглянемо ізометричні вкладення $S_k: \text{Im } Q_k \rightarrow H$, $T_j: \text{Im } P_j \rightarrow H$, тоді $Q_k = S_k S_k^*$, $P_j = T_j T_j^*$ та оператори $P_j Q_k P_l$ мають вигляд

$$P_j Q_k P_l = T_j T_j^* S_k S_k^* T_l T_l^* = T_j (T_j^* Q_k T_l) T_l^*.$$

Зауважимо, що вирази в дужках є матричними блоками оператора A_k . Оскільки оператори $A_k \geq 0$ невивроджені, $\text{Im } P_j Q_k P_j = \text{Im } P_j$, отже, $P_j Q_k P_j$ однозначно визначають проектори P_1, P_2 і відповідні вкладення T_1, T_2 . Тоді (j, l) -й матричний блок оператора A_k має вигляд $T_j^* P_j Q_k P_l T_l$, тобто оператори A_k , $k = 1, \dots, n$, однозначно визначаються набором $P_j Q_k P_l$, $j, l = 1, 2, k = 1, \dots, n$. За операторами A_j можна відновити матрицю Грама G , а отже, можна відновити з точністю до унітарної еквівалентності проектори $Q_1, \dots, Q_n, P_1, P_2$. \square

3. Незвідні зображення

Нехай Λ — множина усіх мультиіндексів

$$\alpha = (j_1, k_1, j_2, \dots, k_{l-1}, j_l, k_l, j_1), \\ j_s = 1, 2; \quad k_s = 1, \dots, n; \quad s = 1, \dots, l; \quad l = 0, 1, \dots$$

Розглянемо набір операторів C_α , $\alpha \in \Lambda$:

$$C_\alpha = P_{j_1} Q_{k_1} P_{j_2} \dots Q_{k_{l-1}} P_{j_l} Q_{k_l} P_{j_1}, \quad (7)$$

Позначимо $\Lambda_i \subset \Lambda$ підмножину індексів, що починаються та закінчуються на i , $i = 1, 2$, тоді $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.

Твердження 3. У незвідному зображенні образи проекторів P_1, P_2 одновимірні тоді і тільки тоді, коли оператори $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$, утворюють комутативний набір.

Доведення. Необхідність. Нехай $\dim(\text{Im } P_1) = \dim(\text{Im } P_2) = 1$. Оскільки для $\alpha \in \Lambda_{j_1}, \beta \in \Lambda_{j_2}$ маємо $\text{Im } C_\alpha \subset \text{Im } P_{j_1}, \text{Im } C_\beta \subset \text{Im } P_{j_2}$, то $C_\alpha = c_\alpha P_{j_1}, C_\beta = c_\beta P_{j_2}, c_\alpha, c_\beta \in \mathbb{C}$ і $C_\alpha C_\beta = C_\beta C_\alpha$ внаслідок комутування проекторів P_1, P_2 .

Достатність. Нехай при $j = 1, 2$ виконуються умови $C_\alpha C_\beta = C_\beta C_\alpha$ для всіх $\alpha, \beta \in \Lambda_j$. Покажемо, що $\dim(\text{Im } P_j) = 1$. Безпосередньо з означення маємо $C_\alpha^* C_\alpha = C_\alpha C_\alpha^*$, тобто $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$ — злічений комутативний набір нормальних операторів.

Позначимо $H_j = \text{Im } P_j, T_j: H_j \rightarrow H$, як і раніше, відповідне ізометричне вкладення. Оскільки $\text{Im } C_\alpha \subset \text{Im } P_j, \alpha \in \Lambda_j$, то $T_j^* C_\alpha T_j, \alpha \in \Lambda_j$ — комутативний набір нормальних операторів в H_j . Нехай $E(\Delta)$ є сумісний розклад одиниці цього комутативного набору, і нехай Δ — борелівська множина, для якої $E(\Delta) \neq 0$.

Розглянемо підпростір $E(\Delta)H_j = H_j^0 \subseteq H_j$. Тоді підпростір $\overline{\text{Pol}(Q_k, P_j)H_j^0} = H^0 \subset H$ інваріантний відносно дії проекторів $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$. Оскільки набір $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$ є незвідним, то $H^0 = H$ і оскільки довільний вектор H_0 лежить в $P_0 H^0$, то маємо також $H_j^0 = H_j$, тобто $E(\Delta) = I$.

Таким чином, для будь-якої борелівської множини Δ , для якої $E(\Delta) \neq 0$ маємо $E(\Delta) = I$, звідси випливає, що існує єдина точка x_0 , така що $E(x_0) = I$. Тоді оператори $T_j^* C_\alpha T_j, \alpha \in \Lambda_j$ є скалярними операторами в H_j , і для довільного $f \in H_j$ підпростір $\overline{\text{Pol}(Q_k, P_j)f} \subset H$ є інваріантним підпростором, і тому співпадає з усім H . З іншого боку, проекція $\overline{\text{Pol}(Q_k, P_j)f}$ на H_j — одновимірний підпростір, породжений f , тобто $\dim H_j = 1$. \square

Зауваження 3. З попереднього доведення випливає, що у випадку незвідного комутативного набору $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$, для довільного $\alpha \in \Lambda_j, j = 1, 2$, маємо

$$C_\alpha = c_\alpha P_j, \quad c_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Таким чином, у цьому випадку кожний незвідний набір проекторів $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$, що задовольняють (4), визначає набір чисел $c_\alpha, \alpha \in \Lambda$.

Природно виникає питання, чи можна за набором c_α , $\alpha \in \Lambda$ відновити набір проекторів $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$. Наступна теорема показує, що це так, причому достатньо задати деякий скінченний набір чисел c_α , $\alpha \in \Lambda$.

Теорема 4. *Нехай набір ортопроекторів $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$, що задовольняють умови (4) незвідний та виконуються умови:*

- i) $P_1 \neq 0, P_2 \neq 0$;*
- ii) при кожному $j = 1, \dots, n$ пара проекторів $P_0 = P_1 + P_2$ та Q_j знаходяться у загальному положенні;*
- iii) оператори C_α , $\alpha \in \Lambda$, що визначаються формулою (7) утворюють комутативний набір.*

Тоді $C_\alpha = c_\alpha P_j$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \Lambda_j$, i набір чисел

$$c_\alpha, \quad \alpha \in \{(j, k, j), (1, k, 2, l, 1) \mid j = 1, 2; k, l = 1, \dots, n\},$$

визначає проектори $P_1, P_2, Q_1, \dots, Q_n$ однозначно з точністю до унітарної еквівалентності.

Доведення. За твердженням 3 у незвідному зображенні простори H_1, H_2 одновимірні, тому оператори A_1, \dots, A_n , визначені (6), є звичайними додатними матрицями у \mathbb{C}^2 ,

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11}^j & a_{12}^j \\ a_{21}^j & a_{22}^j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n,$$

причому набір матриць $U^* A_k U$, $k = 1, \dots, n$, де U — діагональна унітарна матриця, визначає унітарно еквівалентний набір (4).

Зауважимо, що принаймні одне з чисел a_{12}^j відмінне від нуля. Справді, якщо усі $a_{12}^j = 0$, $j = 1, \dots, n$, то підпростір, породжений $\{H_1, Q_k H_1, k = 1, \dots, n\}$, буде інваріантним підпростором, який ортогональний до H_2 .

Перенумеровуючи при потребі проектори Q_1, \dots, Q_n , забезпечимо, щоб виконувалась умова $a_{12}^1 \neq 0$, і вибираючи належним чином діагональну унітарну матрицю, вважатимемо, що $a_{12}^1 > 0$.

З (6) маємо

$$a_{jj}^k = T_j^* Q_k T_j = T_j^* C_{jkj} T_j = c_{jkj}, \quad j = 1, 2; k = 1, \dots, n.$$

Оскільки $a_{12}^1 \geq 0$, маємо

$$a_{12}^1 = T_1^* Q_1 T_2 = \sqrt{T_1^* Q_1 T_2 T_2^* Q_1 T_1} = T_1^* \sqrt{P_1 Q_1 P_2 Q_1 P_1} T_1 = \sqrt{c_{11211}}.$$

Оскільки

$$a_{12}^1 a_{21}^k = T_1^* Q_1 T_2 T_2^* Q_k T_1 = T_1^* Q_1 P_2 Q_k T_1 = T_1^* P_1 Q_1 P_2 Q_k P_1 T_1 = c_{112k1},$$

маємо

$$a_{12}^k = \bar{a}_{21}^k = \frac{\bar{c}_{112k1}}{\sqrt{c_{11211}}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Таким чином, ми знайшли матриці A_1, \dots, A_n . Задаючи у $H_0 = \mathbb{C}^2$

$$P'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

за теоремою 3 отримуємо потрібний розв'язок (4). \square

Зауваження 4. Розмірність простору незвідного зображення, що задовольняє умови теореми, дорівнює $2n$, для того, щоб задати зображення, слід задати, з точністю до діагональної унітарної еквівалентності, $n \times 2$ невід'ємних матриць, сума яких є одиничною матрицею. Для цього потрібно задати $2n - 1$ дійсних та $n - 2$ комплексних чисел.

У формулюванні теореми фігурує $2n + n^2$ чисел, з яких $3n$ є дійсними. Разом з тим, у доведенні теореми використовуються лише числа c_{jkj} (дійсні, $2n$ штук), та c_{112k1} (одне додатне, $n - 1$ комплексні). Зрозуміло, що умова $A_1 + \dots + A_n = I$ дозволяє відповідно зменшити кількість чисел.

Остаточно, для однозначного визначення набору проекторів, що задовольняють умови теореми, досить задати числа

$$c_{jkj}, c_{112k1}, \quad j = 1, 2; \quad k = 1, \dots, n - 1,$$

де $1 \leq l \leq n$ — деяке число, при якому $c_{11211} \neq 0$.

Зауваження 5. У випадку *all but one* наборів (лише один проектор P_1), незвідний набір задається числами $0 < c_1, \dots, c_n < 1$ з умовою $c_1 + \dots + c_n = 1$. Для випадку двох проекторів P_1, P_2 таких простих умов на числа c_α , які б забезпечували існування набору проекторів (4) немає: ці числа визначають матричні елементи операторів A_1, \dots, A_n , для яких повинна виконуватись умова $A_1 + \dots + A_n = I$.

Автори висловлюють щирю вдячність М.Л.Василевському та Ю.С.Самойленку за змістовні дискусії щодо предмету статті та добру увагу.

Література

- [1] *N. Vasilevski*. Commutative algebras of Toeplitz operators on the Bergman space. // Series: Operator Theory: Advances and Applications — 2008ю — Vol. 185. — 417 p.
- [2] *Yu. I. Karlovich, Luis V. Pessoa*. Algebras Generated by the Bergman and Anti-Bergman Projections and by Multiplications by Piecewise Continuous Functions. // Integral Equations and Operator Theory. — 2005. — vol. 52, no 2. — 219–270.
- [3] *Yu. I. Karlovich, Luis V. Pessoa*. C^* -Algebras of Bergman Type Operators with Piecewise Continuous Coefficients. // Integral Equations and Operator Theory. — 2007. — vol. 57, no 4. — 521–565.
- [4] *А. В. Стрелец, И. С. Феценко*. О системах подпространств гильбертова пространства, удовлетворяющих условиям на углы между каждой парой подпространств // Алгебра и анализ. — 2012. — Т. 24, № 5. — 181–214.