НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Бакан Андрій Геннадійович

УДК 517.5; 517.9

ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ НА ДІЙСНІЙ ОСІ, ПРОБЛЕМА КАРЛІНА ТА НОРМАЛЬНІСТЬ ОПУКЛИХ МНОЖИН

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2009

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Наукові консультанти:

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
ДЗЯДИК Владислав Кирилович ;

доктор фізико-математичних наук, професор,
академік НАН України
САМОЙЛЕНКО Анатолій Михайлович,
Інститут математики НАН України, директор.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор,
ТИХОМІРОВ Володимир Михайлович,
Московський державний університет ім. М.В.Ломоносова, завідувач кафедри загальних проблем керування механіко-математичного факультету;

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
ТАМРАЗОВ Промарз Мелікович,
Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу;

доктор фізико-математичних наук
ГОЛІНСЬКИЙ Леонід Борисович,
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна НАН України, провідний науковий співробітник відділу теорії функцій.

Захист відбудеться "22 " грудня 2009 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м.Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "20"листопада 2009 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А.С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертація присвячена вивченню властивостей тих мір μ і ваг w, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у просторах $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ і C_w^0 відповідно, одержанню часткового розв'язку проблеми Карліна про нуле-зменшуючі послідовності і аналітичних зображень тих борелівських мір на дійсній осі, моменти яких породжують визначені класичні проблеми моментів Г.Гамбургера і Т.Стілтьєса, а також аналізу властивостей сукупностей опуклих множин, для яких алгоритм циклічних проекцій збігається рівномірно лінійно.

Першою з головних задач, яка розглядається в дисертаційній роботі, є задача одержання аналітичних зображень тих борелівських мір на дійсній осі, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у просторі $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ для даного або для всіх $0 < p < \infty$. Відомий математик С.Н.Бернштейн у 1924 році сформулював проблему про знаходження таких умов на вагу w, щоб алгебраїчні многочлени були щільними у напівнормованому просторі C_w^0. Розв'язанню цієї проблеми присвятили свої роботи С.Ізюмі, Т.Кавата (1937), Т.Холл (1939), Н.Ахієзер, К.Бабенко (1947), М.Джрбашян (1947), А.Шагінян (1947), Л.Карлесон (1951), С.Мандельбройт (1951), Г.Поллард (1953), І.Відав (1954), Дж.Хорват (1954), Г.Поллард, В.Фукс (1955), Б.Я.Левін (1989), Д.Любинський (2006) та ін. На сьогодні відомо кілька розв'язків проблеми С.Н.Бернштейна: Н.І.Ахієзера і С.Н.Бернштейна (1947), С.М.Мергеляна (1958) і Луї де Бранжа (1959). Аналогічна проблема знаходження умов на міру μ з необмеженим носієм, щоб алгебраїчні поліноми були щільними у $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ для даного $1 \leq p < \infty$, досліджувалася Е.Ж.Акутовічем (1966), П.К.Гетою (1969), Л.Д.Пітом (1976), Кр.Бергом і Ж.П.Р.Крістенсеном (1981), Б.Я.Левіним (1989), Кр.Бергом і М.Тхілом (1991), Кр.Бергом (1996) та ін. Особливої уваги ця проблема набула у 1989 році, коли Кр.Берг і Г.Педерсен знайшли помилку у доведенні, а у 1990 році П.Кусіс сконструював контрприклад до теореми Г.Гамбургера 1944 року про повний опис так званих неванліннівських екстремальних (N-екстремальних) мір, тобто тих мір μ, для яких множина алгебраїчних многочленів є щільною у $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, але такою не є у просторі $L_2(\mathbb{R}, (1 + x^2)d\mu)$. Правильні умови належності міри до множини N-екстремальних мір були знайдені у 1997 році незалежно А.А.Борічевим, М.Л.Содіним і автором. У 1998 році А.А.Борічев і М.Л.Содін встановили необхідну і достатню умову щільності алгебраїчних поліномів у просторі

$L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ при фіксованому $1 \leq p < \infty$ для дискретних мір μ з достатньо рідким носієм, яка є прямим аналогом вищезгаданого розв'язку де Бранжа (1959) проблеми С.Н.Бернштейна. Першим з головних результатів дисертаційної роботи є остаточний розв'язок цієї проблеми не тільки для просторів $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ із $p \in (0, +\infty)$ і довільною мірою μ, а і для більш загальних сепарабельних просторів Фреше у сенсі Банаха $L^{\Phi}(\mathbb{R}, d\mu)$. В якості прямого наслідку цього результату одержано аналітичні зображення тих борелівських мір на дійсній осі, моменти яких породжують визначені класичні проблеми моментів Г.Гамбургера (1920) і Т.Стілтьєса (1894).

Друга задача, яку розглянуто в дисертації, є так звана проблема Карліна про нуле-зменшуючі послідовності. Послідовність дійсних чисел $\gamma := \{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ зветься нуле-зменшуючою, якщо для довільного поліному $p(x) = p_0 + p_1 x + ... + p_m x^m$ з дійсними коефіцієнтами кількість дійсних нулів перетвореного поліному $T_\gamma p(x) := \gamma_0 p_0 + \gamma_1 p_1 x + ... + \gamma_m p_m x^m$ не більша ніж кількість дійсних коренів p. У 1884 році Е.Лагерр довів, що обернені значення у невід'ємних цілих точках довільної цілої функції, всі нулі якої від'ємні і яка є границею алгебраїчних поліномів тільки з дійсними нулями, формують нуле-зменшуючу послідовність. Тільки у 1968 році ця теорема Лагерра привела відомого американського математика С.Карліна до наступного питання (яке одержало назву проблеми Карліна): чи існують нуле-зменшуючі послідовності, які мають інший вигляд, ніж у теоремі Лагерра ? У 1980 році американські математики Т.Кревен і Дж.Шордаш опублікували розв'язання цієї проблеми, стверджуючи, що обернені величини кожної нуле-зменшуючої послідовності формують так звану послідовність множників першого роду і навпаки. Послідовність множників першого роду означається як така послідовність дійсних чисел $\alpha := \{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, щоб для довільного поліному p тільки з дійсними нулями перетворений поліном $T_\alpha p$ також мав тільки дійсні нулі. Множина таких послідовностей була повністю охарактеризована у 1914 році Г.Поліа і І.Шуром. Але у 1992 році автор спільно з А.П.Голубом довів, що розв'язок Т.Кревена і Дж.Шордаша є помилковим, і тому проблема Карліна знову виявилась відкритою. Другий з головних результатів дисертаційної роботи полягає у розв'язку проблеми Карліна для досить широкого підкласу всіх нуле-зменшуючих послідовностей.

Третьою з головних задач, яка розглядається в дисертаційній роботі, є задача опису властивостей тих скінченних сукупностей опуклих множин, для яких швидко збігається так званий алгоритм циклічних проекцій (коротко: АЦП). У випадку, коли всі опуклі множини є афінними (тобто є зсувами деяких підпросторів), АЦП був повністю охарактеризований Дж.Ньюманом у 1950 році для двох множин, а у 1962 році І.Гальперіним — для їх довільної скінченної кількості. У 1965 році Л.М.Брегман уперше розглянув випадок довільних опуклих множин, але тільки у 1996 році математики Г.Бочке і Дж.Борвейн ввели нове поняття лінійної регулярності для скінченної сукупності опуклих множин і встановили, що ця умова є достатньою для швидкої збіжності АЦП, а саме, для так званої його рівномірної лінійної збіжності. У кінці 2008 року була опублікована стаття Ф.Дойча і Х.Хундала, в якій була встановлена необхідність умов Бочке — Борвейна. Третій з головних результатів дисертаційної роботи полягає у повній геометричній характеризації поняття лінійної регулярності сукупності опуклих множин за допомогою нормальності як власне самих опуклих множин, так і системи конусів допустимих напрямків, яку вони породжують. Поняття нормальності опуклого конуса ввів М.Г.Крейн у 1940 році, скінченної системи опуклих конусів — у 1972 році Г.Джеймсон, і далі це поняття було істотно розвинуто у кандидатський дисертації автора для опису умов, при яких має місце рівність Моро — Рокафеллара.

Дисертаційна робота містить також розв'язки цілого ряду актуальних супровідних проблем, які мають окремі історії і викликають самостійний інтерес.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами "Структурні та апроксимаційні властивості функціональних множин", номер державної реєстрації 0198U001990; "Апроксимаційні характеристики функціональних класів", номер державної реєстрації 0101U000046; "Теорія наближень в лінійних просторах", номер державної реєстрації 0106U000406.

Мета і завдання дослідження. *Мета* дисертаційної роботи полягає у тому, щоб виявити специфічні властивості тих мір μ і ваг w, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у просторах $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ і C_w^0 відповідно, а також тих мір, моменти яких породжують визначені класичні проблеми моментів Г.Гамбургера і Т.Стілтьєса; розробити нові методи досліджень нуле-зменшуючих послідовностей та віднайти характеристичні властивості n-канонічних мір; розповсюдити класичні критерії визначеності проблеми моментів на питання щільності алгебраїчних поліномів у просторах $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ і C_w^0; базуючись на результатах останніх досліджень цілих і мероморфних функцій, визначити істотні властивості цілої функції, які необхідні для розвинення її оберненої величини на прості дроби; за допомогою поняття нормальності описати геометричні властивості тих сукупностей опуклих множин, для яких алгоритм циклічних проекцій збігається рівномірно лінійно.

Об'єктом дослідження є борелівські міри та ваги на дійсній осі, алгебраїчні поліноми та цілі функції, нуле-зменшуючі послідовності, опуклі множини та опуклі конуси у гільбертовому просторі.

Предметом дослідження є щільність алгебраїчних поліномів у різних просторах борелівських функцій на дійсній осі, класична проблема моментів, n-канонічні і N-екстремальні міри, розвинення на прості дроби обернених величин цілих функцій, нуле-зменшуючі властивості лінійних перетворень алгебраїчних многочленів та алгоритм циклічних проекцій для скінченної сукупності опуклих множин у гільбертовому просторі.

Завдання дослідження:

Одержати аналітичні зображення тих борелівських мір μ на дійсній осі, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у просторі $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ для даного або для всіх $0 < p < \infty$, а також тих мір, моменти яких породжують визначені класичні проблеми моментів Г.Гамбургера і Т.Стілтьєса.

Розв'язати проблему Карліна про нуле-зменшуючі послідовності при певних умовах на ці послідовності.

За допомогою поняття нормальності отримати повний геометричний опис тих сукупностей опуклих множин, для яких алгоритм циклічних проекцій збігається рівномірно лінійно.

Встановити нові характеристичні властивості n-канонічних мір і дати остаточний опис елементів тих матриць Неванлінни, які відповідають невизначеним проблемам моментів.

Отримати аналоги другого критерію Г.Гамбургера визначеності проблеми моментів для поліноміальної щільності у просторах C_w^0 і $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ та дати остаточний опис поповнення простору C_w^0.

Довести щільність алгебраїчних поліномів у просторах Харді на смузі комплексної площини.

Одержати необхідні і достатні умови розвинення оберненої величини цілої функції тільки з простими нулями у абсолютно збіжний ряд простих дробів.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у такому.

1. Одержані аналітичні зображення тих борелівських мір μ на дійсній осі, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у просторі $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ для даного або для всіх $0 < p < \infty$, а також тих мір, моменти яких породжують визначені класичні проблеми моментів Г.Гамбургера і Т.Стілтьєса.

2. Частково розв'язана проблема Карліна про нуле-зменшуючі послідовності, зокрема, для таких із них, які задовольняють умову Карлемана.

3. За допомогою поняття нормальності отримано повний геометричний опис тих сукупностей опуклих множин, для яких алгоритм циклічних проекцій збігається рівномірно лінійно.

4. Встановлено нові характеристичні властивості n-канонічних мір і дано остаточний опис елементів тих матриць Неванлінни, які відповідають невизначеним проблемам моментів.

5. Отримано аналоги другого критерія Г.Гамбургера визначеності проблеми моментів для поліноміальної щільності у просторах C_w^0 і $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ та дано остаточний опис поповнення простору C_w^0.

6. Доведено щільність алгебраїчних поліномів у просторах Харді на смузі комплексної площини.

7. Одержано нові необхідні і достатні умови розвинення оберненої величини цілої функції тільки з простими нулями у абсолютно збіжний ряд простих дробів.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Встановлені у роботі зображення мір, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у всіх просторах L_p одночасно, можуть бути корисними фахівцям теорії наближень для побудови поліноміальних апроксимацій, збіжних відразу у всіх просторах L_p. Отримані у роботі геометричні описи тих сукупностей опуклих множин, для яких алгоритм циклічних проекцій збігається рівномірно лінійно, можуть бути використані фахівцями обчислювальної математики для практичної перевірки умов збіжності цього алгоритму.

Особистий внесок здобувача. Визначення головних напрямків досліджень належать науковим консультантам В.К.Дзядику і А.М.Самойленку. Похідні питання проведених досліджень висувалися як автором і співавторами, так і учасниками тих наукових семінарів, де доповідалися результати досліджень. Всі результати отримано здобувачем самостійно, а у роботах, які опубліковані у співавторстві, внесок всіх авторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— Всесоюзній школі "Теория приближения функций", Луцьк, 31 серпня — 8 вересня 1989 року;

— п'ятій міжнародній конференції по теорії апроксимації та оптимізації на Карибах, Пуенте-Пітре, Гваделупа, Франція, 29 березня - 2 квітня 1999 року;

— міжнародній конференції з теорії наближення та її застосувань, присвяченої пам'яті В.К.Дзядика, Київ, 26—31 травня 1999 року;

— семінарі по теорії функцій університету міста Левен, Бельгія, 5 травня 1999 року, керівники семінару: проф. A.Kuijlaars і W.Van Assche;

— семінарі № 160 інституту біоматематики та біометрії, Мюнхен, Німеччина, 11 травня 1999 року, керівник семінару: проф. R.Lasser;

— семінарах Берлінга університету міста Лінчопінг, Швеція, 22 квітня 1999 року та 7 грудня 2005 року, керівник семінару: проф. L.Hedberg;

— семінарах по теорії функцій університету міста Упсала, Швеція, 26 квітня 1999 року та 12 грудня 2005 року, керівник семінару: проф. S.Kaijser;

— семінарах по теорії функцій університету міста Копенгаген, Данія, 3 травня 1999 року та 1 грудня 2005 року, керівник семінару: проф. Ch.Berg;

— семінарах по теорії функцій університету міста Вюрцбург, Німеччина, у 1999, 2000, 2002, 2005 та 2007 роках, керівник семінару: проф. St.Ruscheweyh;

— семінарі кафедри загальних проблем керування механіко-математичного факультету Московського державного університету ім. М.В.Ломоносова, 5 жовтня 2007 року, керівник семінару: доктор фіз.-мат. наук, професор В.М.Тихоміров;

— семінарі відділу теорії функцій (неодноразово) Інституту математики НАН України, керівник семінару: чл.-кор. НАН України В.К.Дзядик, чл.-кор. НАН України О.І.Степанець, доктор фіз.-мат. наук А.С.Романюк;

— Вченій раді Інституту математики НАН України, 1 липня 2008 року;

— Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті ім. Івана Франка, 10 вересня 2009 року, керівник семінару: професор А.А.Кондратюк;

— міжвузівському семінарі по теорії функцій у Дніпропетровському національному університеті ім. Олеся Гончара, 16 вересня 2009 року, керівник семінару: професор В.Ф.Бабенко;

— семінарі кафедри математичного аналізу Інституту математики, економіки та механіки Одеського національного університету ім. І.І.Мечнікова, 25 вересня 2009 року, керівник семінару: професор Е.А. Стороженко;

— Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України, 30 вересня 2009 року, керівники семінару: академік НАН України Ю.М.Березанський, чл.-кор. НАН України М.Л.Горбачук, чл.-кор. НАН України Ю.С.Самойленко;

— міському семінарі по теорії функцій у Харківському національному університеті ім.В.Н.Каразіна, 1 жовтня 2009 року, керівник семінару: професор С.Ю.Фаворов;

— семінарі "Сучасний аналіз"у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, 21 жовтня 2009 року, керівники семінару: професори Ю.Г.Кондратьєв та І.О.Шевчук.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у роботах [1-30], серед яких роботи [1-21] опубліковано у фахових виданнях, що включені до переліку ВАК України, з них 10 — у співавторстві і 11 — самостійно.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків, додатків А, Б, В, Д та списку використаних джерел, що містить 208 найменувань. Повний обсяг роботи складає 411 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

Сформульовані та згадані нижче леми і теореми мають ті ж самі номери, що і в дисертації. Нумерація формул та деякі позначення є самостійними.

У першому розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за темою дисертації та сформульовано її основні результати.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено викладенню і доповненню відомих результатів класичної проблеми моментів і поліноміальної щільності у просторах C_w^0 і $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$. А саме, встановлено нові характеристичні властивості n-канонічних мір класичної проблеми моментів на дійсній осі, дано остаточний опис елементів тих матриць Неванлінни, які відповідають невизначеним проблемам моментів, доповнено відомі критерії С.М.Мергеляна і Кр.Берга поліноміальної щільності у просторах C_w^0 і $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ відповідно, і нарешті, одержано поліноміальну версію відомого розв'язку Л.де Бранжа (1959) проблеми С.Н.Бернштейна (1924) про умови на вагу w, які забезпечують щільність алгебраїчних многочленів у просторі C_w^0.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено одержанню аналітичних зображень тих борелівських мір на дійсній осі, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у просторі $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ для заданого або для всіх $0 < p < \infty$. Позначимо через $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ множину всіх невід'ємних і напівнеперервних зверху на $\mathbb{R}$ функцій (ваг) w, для яких $||x^n||_w < \infty$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$, де $||f||_w := \sup_{x\in\mathbb{R}} w(x)|f(x)|$, $f \in C(\mathbb{R})$. Відомий російський математик С.Н.Бернштейн у 1924 році сформулював проблему про знаходження таких умов на вагу $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$, щоб алгебраїчні многочлени були щільними у напівнормованому функціоналом $||\cdot||_w$ просторі C_w^0 всіх таких неперервних на дійсній осі функцій f, що $w(x)f(x) \to 0$, коли $|x| \to +\infty$. Сьогодні відомо декілька розв'язків цієї проблеми: Н.І.Ахієзера і С.Н.Бернштейна (1947), С.М.Мергеляна (1958) і Л. де Бранжа (1959). Основним інструментом дослідження багатьох питань поліноміальної щільності в останні роки став розв'язок Л. де Бранжа, який після уточнень, зроблених М.Л.Содіним і П.М.Юдітским у 1996 році, може бути сформульований в такий спосіб.

Теорема A (Л. де Бранж, 1959)**.** *Нехай для $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ множина $S_w := \{x \in \mathbb{R} \,|\, w(x) > 0\}$ є необмеженою. Алгебраїчні многочлени $\mathcal{P}$ не є щільними у просторі C_w^0 тоді і тільки тоді, коли існує така ціла трансцендентна функція B не вище першого порядку і нульового типу, що всі її нулі Λ_B є простими і дійсними, $\Lambda_B \subseteq S_w$ і*

$$\sum\nolimits_{\lambda\in\Lambda_B} \frac{1}{w(\lambda)|B'(\lambda)|} < \infty. \qquad (1)$$

Один із важливих наслідків цієї теореми полягає у тому, що нещільність алгебраїчних многочленів у просторі C_w^0 спричинює їх нещільність у підпросторі $C_{w\cdot\chi_{\Lambda_B}}^0$, який є зосередженим на досить рідкій множині Λ_B всіх нулів деякої цілої трансцендентної функції нульового експоненційного типу. Тут $\chi_A(\cdot)$ позначає індикаторну функцію множини $A \subset \mathbb{R}$. Ця властивість просторів C_w^0 буде називатися *властивістю нещільності Л.де Бранжа.* Та насправді властивість нещільності Л. де Бранжа має місце у трохи посиленій формі, яку було знайдено у Лемі 3.6 третього розділу роботи і яка, у свою чергу, є вирішальним моментом у доведенні сформульованої нижче теореми 3.3. Нехай M_f позначає верхню функцію Бера функції f.

Лема 3.6 ([12]). *Для $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ з необмеженою S_w нехай $S \subset S_w$ є такою, що $w(x) = M_{w\cdot\chi_S}(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Якщо для довільної множини $G \subset S$, яка є множиною всіх нулів деякої цілої трансцендентної функції нульового експоненційного типу, алгебраїчні поліноми є щільними у просторі $C^0_{w\cdot\chi_G}$, то вони також є щільними і у просторі C^0_w.*

Зауважимо, що в теоремі 2.7 [10] другого розділу роботи було доведено, що при виконанні умов теореми А алгебраїчні многочлени не є щільними у просторі C^0_w тоді і тільки тоді, коли є скінченною така величина

$$\varliminf_{n\to\infty} \inf_{\substack{P(0)=1\ ,\ \deg P=n \\ P\in\mathcal{P}[\mathbb{R}]\ ,\ \Lambda_P\subset S_w}} \left[\ P'(0)^2 - P''(0) + \sum_{\lambda\in\Lambda_P} \frac{1}{w(\lambda)|\lambda|^{\sigma}\,|P'(\lambda)|}\ \right], \quad (2)$$

де $\sigma := \chi_{S_w}(0)$ і $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ позначає множину алгебраїчних многочленів із дійсними коефіцієнтами.

Позначимо через $\mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ множину скінченних борелівських мір на $\mathbb{R}$, а через $\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ — множину мір $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ зі всіма скінченними моментами $s_n(\mu):=\int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$, $n\in\mathbb{N}_0$. Проблема знаходження таких умов на міру $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ з необмеженим носієм $\operatorname{supp}\mu := \{x \in \mathbb{R} \,|\, \mu((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) > 0\ \forall\varepsilon > 0\}$, щоб алгебраїчні поліноми були щільними у $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ для даного $1 \le p < \infty$, досліджувалася паралельно проблемі С.Н.Бернштейна Е.Ж.Акутовічем (1966), П.К.Гетою (1969), Л.Д.Пітом (1976), Кр.Бергом і Ж.П.Р.Крістенсеном (1981), Б.Я.Левіним (1989), Кр.Бергом і М.Тхілом (1991), Кр.Бергом (1996) та ін. Особливу гостроту ця проблема отримала у 1989 році, коли Кр.Берг і Г.Педерсен знайшли помилку у доведенні, а у 1990 році П.Кусіс сконструював контрприклад до теореми Г.Гамбургера 1944 року про повний опис так званих неванліннівських екстремальних (N-екстремальних) мір, тобто тих мір $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$, для яких множина алгебраїчних многочленів $\mathcal{P}$ є щільною у $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, але не є такою у просторі $L_2(\mathbb{R}, (1+x^2)d\mu)$. Правильні умови належності міри до множини N-екстремальних мір було знайдено у 1997 році незалежно А.А.Борічевим, М.Л.Содіним і автором. А саме, теорема Гамбургера стверджувала, що міра $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ є N-екстремальною тільки у тому випадку, коли існує така трансцендентна ціла функція E нульового експоненційного типу тільки з дійсними простими нулями і $\lim_{|\lambda|\to\infty,\ \lambda\in\Lambda_E} \frac{|\lambda|^n}{|E'(\lambda)|} = 0$ для довільного $n\in\mathbb{N}_0$ (клас

$\mathcal{E}_0^{\mathcal{H}}[\mathbb{R}]$), що множина її нулів Λ_E співпадає із носієм $\operatorname{supp}\mu$ міри μ і виконуються такі дві умови

$$(a) \sum_{\lambda\in\Lambda_E} \frac{1}{\mu(\{\lambda\})\, E'(\lambda)^2\,(1+\lambda^2)} < \infty\ ;\ (b) \sum_{\lambda\in\Lambda_E} \frac{1}{\mu(\{\lambda\})\, E'(\lambda)^2} = +\infty\ . \quad (3)$$

Вищезгадане виправлення умов на правильні полягає у тому, що умову (b) у (3) треба замінити на таку:

$$\sum\nolimits_{\lambda\in\Lambda_F} \frac{1}{\mu(\{\lambda\})\, F'(\lambda)^2} = +\infty \quad (4)$$

для довільних таких цілих функцій $F\in\mathcal{E}_0^{\mathcal{H}}[\mathbb{R}]$, що $\Lambda_F\subset\Lambda_E$. Розвиваючи результати цього дослідження, у 1998 році А.Борічев і М.Содін одержали прямий аналог теореми А для просторів $L_p(\mathbb{R},d\mu)$ при фіксованому $1\le p<\infty$ для дискретних мір μ, носій яких при деякому $a>0$ задовольняє умову: $\sum_{\lambda\in\operatorname{supp}\mu}(1+|\lambda|)^{-a}<\infty$. Важливість цього результату полягала, зокрема, у тому, що для таких просторів $L_p(\mathbb{R},d\mu)$ було доведено властивість нещільності Л.де Бранжа, яку означено після теореми А. У теоремі 3.9 [21] третього розділу доведено, що для мір μ з більш щільним носієм ця властивість вже не є справедливою у просторах $L_p(\mathbb{R},d\mu)$ з $2\le p<\infty$.

У 1998 році автором [23] було остаточно описано всі міри μ, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у просторі $L_p(\mathbb{R},d\mu)$ для деякого $p\in[1,\infty)$. У 2008 році [17] цей результат було розповсюджено на всі $0<p<\infty$ (див. теорему 3.1). Нехай $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$) позначає сукупність всіх борелівських підмножин $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^+:=[0,+\infty)$) і $\mathcal{W}^*(\mathbb{R}^+)$ — множину всіх ваг $w\in\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$, для яких $w(x)=0$, $x<0$.

Теорема 3.1 ([17]). *Нехай $0<p<\infty$ і $\mu\in\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ має необмежений носій. Тоді алгебраїчні поліноми є щільними у $L_p(\mathbb{R},d\mu)$ тоді і тільки тоді, коли міра μ може бути зображена у такій формі:*

$$\mu(A)=\int\limits_A w(x)^p\,d\nu(x)\ ,\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\ , \quad (5)$$

(коротко: $d\mu(x)=w(x)^p\,d\nu(x)$) для деякої $\nu\in\mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ і такої $w\in\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$, що множина алгебраїчних поліномів $\mathcal{P}$ є щільною у C_w^0.

Далі, будемо писати $\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ для множини всіх мір μ в $\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$, які зосереджені на $\mathbb{R}^+:=[0,+\infty)$, тобто $\operatorname{supp}\mu\subset\mathbb{R}^+$.

Проблема моментів Гамбургера (Стілтьєса) полягає у знаходженні для послідовності дійсних чисел $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ такої $\mu\in\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$), що її моменти задовольняють умову $s_n(\mu)=a_n$ для всіх $n\in\mathbb{N}_0$.

Якщо розв'язок існує і є єдиним, то говорять, що відповідна проблема моментів є *визначеною.* Міри μ, які розв'язують такі проблеми також звуться *визначеними.* Іншими словами, міра $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$) зветься *визначеною у сенсі Гамбургера* (*Стілтьєса*) (коротко: $\mu \in \det \mathcal{H}$ ($\det \mathcal{S}$)), якщо не існує іншої міри у $\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$) з тими ж самими моментами, що і у μ.

У 1923 році М.Рісс встановив прямий зв'язок між визначеністю міри μ у сенсі Гамбургера і поліноміальною щільністю у просторі $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$. Він довів, що

$$\mu \in \det \mathcal{H} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{P} \text{ є щільною у } \; L_2(\mathbb{R}, (1+x^2)\, d\mu)\;. \tag{6}$$

У 1991 році Кр.Берг і М.Тхілл доповнили (6) таким твердженням:

$$\mu \in \det\mathcal{S} \Leftrightarrow \mathcal{P} \text{ є щільною у } L_2(\mathbb{R}, (1+x)d\mu) \text{ і } L_2(\mathbb{R}, x\cdot(1+x)d\mu)\,. \tag{7}$$

Застосування теореми 3.1 до результатів (6) і (7) дало змогу отримати наступне.

Теорема 3.2 ([17])**.** *Нехай $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$). Не існує іншої міри у $\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$) з тими ж самими моментами, що і у μ, тобто $\mu \in \det \mathcal{H}$ ($\det \mathcal{S}$), тоді і тільки тоді, коли існують скінченна борелівська міра ν на $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^+$) і вага $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ ($\mathcal{W}^*(\mathbb{R}^+)$) такі, що алгебраїчні поліноми є щільними у напівнормованому просторі C_w^0 (просторах C_w^0 і $C^0_{\sqrt{x}\cdot w}$) і*

$$\mu(A) = \int_A \frac{w(x)^2}{1+x^2}\; d\nu(x) \;\left(\int_A \frac{w(x)^2}{1+x}\; d\nu(x) \right)\,, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\; (\,\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\,)\;.$$

Міра $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ зветься *невизначеною (у сенсі Гамбургера)* (коротко: $\mu \in \operatorname{indet} \mathcal{H}$), якщо множина V_μ всіх таких мір $\nu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$, що $s_n(\nu) = s_n(\mu)$, $n \in \mathbb{N}_0$, містить хоча б одну міру, яка не співпадає з μ.

Моменти кожної міри $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ і відомий процес ортогоналізації Шмідта по відношенню до скалярного добутку $(x^n, x^m) = s_{n+m}(\mu)$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, єдиним чином визначає послідовність ортонормованих поліномів (першого роду) $\{P_k^\mu\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ з додатними старшими коефіцієнтами. Відповідна послідовність поліномів $\{Q_k^\mu\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ другого роду будується по формулі $Q_k^\mu(x) := \int_\mathbb{R} [P_k^\mu(x) - P_k^\mu(t)]/(x-t)\, d\mu(t)$. Ці послідовності залежать тільки від моментів μ і тому є однаковими для всіх мір з V_μ. Якщо $\mu \in \operatorname{indet} \mathcal{H}$, то ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(|P_n^\mu(z)|^2 + |Q_n^\mu(z)|^2)$

збігається для всіх $z \in \mathbb{C}$ і тому можливо означити чотири трансцендентних цілих функцій:

$$A_\mu(z) = z \sum_{k=0}^\infty Q_k^\mu(0) Q_k^\mu(z) \ ; \qquad C_\mu(z) = 1 + z \sum_{k=0}^\infty P_k^\mu(0) Q_k^\mu(z) \ ;$$
$$B_\mu(z) = -1 + z \sum_{k=0}^\infty Q_k^\mu(0) P_k^\mu(z) \ ; \ D_\mu(z) = z \sum_{k=0}^\infty P_k^\mu(0) P_k^\mu(z) \ ,$$

що задовольняють умову $A_\mu(z)D_\mu(z) - B_\mu(z)C_\mu(z) \equiv 1$, а також функцію

$$\rho(\mu, z) \ := 1 / \sum_{n=0}^\infty |P_n^\mu(z)|^2 \ , \quad z \in \mathbb{C} \ . \tag{8}$$

У 1922 році Р.Неванлінна описав множину V_μ для кожної міри $\mu \in \operatorname{indet} \mathcal{H}$. Для викладу результату Неванлінни позначимо через $\mathfrak{P}$ і $\mathcal{N}$ множини таких аналітичних на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ функцій, що відповідно $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$ і $\operatorname{Im} f(z) > 0$ для всіх $z \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 0\}$ і $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ при довільному $z \in -\mathbb{H}$. Р.Неванлінна встановив, що множина $\mathfrak{P}^* := \mathfrak{P} \cup \{\infty\}$ може бути використана для параметризації сукупності мір V_μ і довів, що відображення $\varphi \to \nu_\varphi$, яке визначається відомою формулою Неванлінни

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu_\varphi(t)}{t - z} \ = \ - \ \frac{A_\mu(z)\varphi(z) - C_\mu(z)}{B_\mu(z)\varphi(z) - D_\mu(z)} \ , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \ , \tag{9}$$

є гомеоморфізмом $\mathfrak{P}^* \ni \varphi \to \nu_\varphi \in V_\mu$ множини $\mathfrak{P}^*$ на множину V_μ.

Особливі розв'язки ν_φ в (9), відповідні до тих $\varphi \in \mathfrak{P}^*$, які є або дійсними сталими, або ∞, називають N-*екстремальними* (*неванліннівські екстремальними*). Всі вони є дискретними мірами. Відомо, що для кожного $x \in \mathbb{R}$:

$$\max_{\nu \in V(\mu)} \nu(\{x\}) \ = \ \rho(\mu, x) \ , \tag{10}$$

і величина (10) досягається тільки на одній N-екстремальній мірі ν, залежній від $x \in \mathbb{R}$. Більш точно, кожна N-екстремальна міра у довільній точці її росту x має максимальну масу $\rho(\mu, x)$ у сенсі (10) і тому із врахуванням рівності (10) функцію $\rho(\mu, x)$ називають *максимальною ваговою функцією* проблеми моментів, генерованою моментами міри μ. N-екстремальні міри було охарактеризовано М.Ріссом у 1923 році.

Теорема М.Рісса. *Нехай* $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$.

1. *Якщо* μ *є невизначеною мірою і* $\nu \in V_\mu$, *то множина алгебраїчних поліномів* $\mathcal{P}$ *є щільною у* $L_2(\mathbb{R}, d\nu)$ *тоді і тільки тоді, коли* ν *є* N*-екстремальна міра.*

2. *Якщо* μ *є визначеною мірою у сенсі Гамбургера (тобто* $V_\mu = \{\mu\}$*), то* $\mathcal{P}$ *є щільною у* $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$.

Перше твердження цієї теореми разом із властивістю (6) пояснює еквівалентність двох означень N-екстремальної міри, даних на с. 9 і після формули (9). Якщо в (9) $\varphi \in \mathfrak{P}^*$ є раціональна функція степеня n, тобто $\varphi = \frac{p}{q}$, де p і q є поліномами без спільних нулів і максимум степенів p і q дорівнює n, тоді ν_φ зветься *n-канонічною мірою*. Завдяки (9) довільна n-канонічна міра є дискретною з деякими масами у нулях функції $B_\mu(z)p(z) - D_\mu(z)q(z)$, тобто,

$$d\nu_\varphi(x) \ = \ \sum\nolimits_{\lambda \in \Lambda_{Bp-Dq}} \nu_\lambda^\varphi \cdot \delta(x-\lambda) \ ,$$

де Λ_f позначає множину всіх нулів деякої цілої функції f, δ — дельта-функція Дірака і маси ν_λ^φ даються відповідними лишками. Очевидно, що при $n \geq 1$ відповідно до (10):

$$0 \ < \ \nu_\lambda^\varphi \ < \ \rho(\lambda) \ \ \forall \ \lambda \in \Lambda_{Bp-Dq} \ , \tag{11}$$

а 0-канонічні розв'язки і ν_∞ є N-екстремальними мірами.

Характеризація n-канонічних мір була дана у 1984 році наступним результатом Касієра, який узагальнює теорему М.Рісса.

Теорема Касієра. *Нехай $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ є невизначеною мірою. Міра μ є n-канонічною тоді і тільки тоді, коли замикання алгебраїчних поліномів $\mathcal{P}$ у просторі $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ має корозмірність n.*

У розділі 2 частково дано відповідь на питання наскільки ν_λ^φ (із (11)) менше ніж $\rho(\lambda)$. Крім того, обчислено також корозмірність замикання $\mathcal{P}$ у просторі $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ для довільної невизначеної дискретної міри μ.

Теорема 2.1 ([6]). *Нехай*

$$d\mu(x) \ = \ \sum\nolimits_{k\geq 1} \mu_k \cdot \delta(x-\lambda_k)$$

є довільна дискретна невизначена міра із класу $\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$. Тоді справедливі такі твердження.

(A) *Якщо ρ є максимальною ваговою функцією невизначеної проблеми моментів, генерованою моментами міри μ, то*

$$\sum\nolimits_{k\geq 1} \left(1 - \frac{\mu_k}{\rho(\lambda_k)}\right) \ = \ \ \mathrm{codim}_{L_2(\mathbb{R},d\mu)}\mathcal{P} \ , \tag{12}$$

де через $\mathrm{codim}_{L_2(\mathbb{R},d\mu)}\mathcal{P} \ \in \{0,1,2,\dots\} \cup \{+\infty\}$ позначається корозмірність замикання алгебраїчних поліномів $\mathcal{P}$ у просторі $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$.

(B) *Якщо μ є n-канонічною мірою для деякого невід'ємного цілого числа n, то існують такі числа $\theta_k \in [0,1)$, $k \geq 1$, що*

$$\begin{cases} \mu_k \;=\; (1-\theta_k)\,\rho(\lambda_k) \quad \forall k \geq 1 \;; \\ \sum\limits_{k\geq 1} \theta_k \;=\; n \;. \end{cases}$$

Матриця $M_\mu(z) := \left(\begin{smallmatrix} -A_\mu(z) & C_\mu(z) \\ B_\mu(z) & -D_\mu(z) \end{smallmatrix}\right)$ для означених перед (8) функцій A_μ, B_μ, C_μ, D_μ зветься *базисною матрицею Неванлінни*, яка відповідає мірі $\mu \in \operatorname{indet}\mathcal{H}$. Їх множина позначається через $\mathcal{N}_2^{\mathcal{BH}} := \{M_\mu(z) \,|\, \;\; \mu \in \operatorname{indet}\mathcal{H}\}$. Кожна базисна матриця Неванлінни $M_\mu(z)$ належить більш широкому класу так званих *матриць Неванлінни* $\mathcal{N}_2$. Нагадаємо, що матриця $\left(\begin{smallmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{smallmatrix}\right)$, яка складається з дійсних цілих функцій a, b, c, d, для яких $a(z)d(z) - b(z)d(z) \equiv 1$, належить $\mathcal{N}_2$, якщо всі ці функції трансцендентні і $\frac{a(z)\,t+b(z)}{c(z)\,t+d(z)} \in \mathcal{N}$ для довільного $t \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Поряд з класом $\mathcal{N}_2^{\mathcal{BH}}$ вводимо також клас $\mathcal{N}_2^{\mathcal{H}}$ *матриць Неванлінни, що відповідають невизначеним проблемам моментів*, як множину всіх тих матриць Неванлінни $M(z) = \left(\begin{smallmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{N}_2$, для яких існує така міра $\mu \in \operatorname{indet}\mathcal{H}$, що

$$\left\{ \tfrac{a(z)\varphi(z)+b(z)}{c(z)\varphi(z)+d(z)} \,\middle|\, \varphi \in \mathfrak{P}^* \right\} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{d\,\nu(t)}{t-z} \,\middle|\, \nu \in V(\mu) \right\} . \tag{13}$$

Очевидно, що $\mathcal{N}_2^{\mathcal{BH}} \subset \mathcal{N}_2^{\mathcal{H}} \subset \mathcal{N}_2$. У Наслідку 2.1 [19] розділу 2 роботи показано, що

$$\mathcal{N}_2^{\mathcal{H}} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \middle| \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{N}_2^{\mathcal{BH}} ,\; \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in S_2(\mathbb{R}) \right\} , \tag{14}$$

де $S_2(\mathbb{R})$ — сукупність всіх матриць вигляду $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$, де $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ і $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Позначимо через $\mathcal{H}_0^{\mathcal{N}}[\mathbb{R}]$ клас цілих функцій, який складається з тих $f \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{H}}[\mathbb{R}]$, які не мають такого трансцендентного дільника g нульового експоненційного типу, який є обмеженим на множині Λ_f і функція f/g є трансцендентною. Цей клас був введений у 1998 році А.Борічевим і М.Содіним, які, розповсюджуючи результат про виправлення помилки Г.Гамбургера (див. (4)) на опис елементів матриць із класу $\mathcal{N}_2^{\mathcal{H}}$, довели, що кожний елемент другого рядка матриці $M \in \mathcal{N}_2^{\mathcal{H}}$ пробігає весь клас $\mathcal{H}_0^{\mathcal{N}}[\mathbb{R}]$, коли M змінюється по всьому класу $\mathcal{N}_2^{\mathcal{H}}$. У теоремі 2.2 [19] дисертації доведено, що те ж саме відбувається і для кожного елементу першого рядка матриці

M. Цей результат разом з (14) завершує повний опис всіх можливих елементів матриць Неванлінни, які відповідають невизначеним проблемам моментів по формулі Неванлінни (9).

Нехай $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ позначає множину алгебраїчних многочленів із довільними комплексними коефіцієнтами. У 1921 році Г.Гамбургер довів такі два критерії визначеності мір.

Перша теорема Гамбургера. *Нехай $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$. Тоді (див. (8))*

$$\rho(\mu, z) = \inf\Big\{ \int_{\mathbb{R}} |P(x)|^2 \, d\mu(x) \ \Big| \ |P(z)| = 1 \ , \ P \in \mathcal{P}[\mathbb{C}] \Big\} \ . \qquad (15)$$

Якщо $\mu \in \det \mathcal{H}$, то $\rho(\mu, z) = 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}$, за винятком не більше, ніж зліченної множини точок $z \in \mathbb{R}$, де $\mu(\{z\}) > 0$. Якщо $\mu \in \operatorname{indet} \mathcal{H}$, то $\rho(\mu, z) > 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}$.

Друга теорема Гамбургера. *Нехай $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ і для довільного невід'ємного числа p позначимо $d\mu^{(p)}(x) := |x|^p \, d\mu(x)$. Тоді*

$$\mu \in \operatorname{indet} \mathcal{H} \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\mu, 0) > 0 \quad i \quad \rho(\mu^{(2)}, 0) > 0 \ . \qquad (16)$$

Завдяки еквівалентності М.Рісса (6) обидві теореми можна розглядати як критерії щільності алгебраїчних поліномів у просторі $L_2(\mathbb{R}, (1+x^2)\, d\mu)$. Саме у цьому сенсі перша теорема Гамбургера була поширена на простори C^0_w спочатку у 1939 році Т.Холлом у випадку, коли S_w є дискретною множиною, а потім у 1956 році С.М.Мергеляном для довільної ваги $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$. Після уточнень, зроблених Б.Я.Левіним у 1989 році, цей результат формулюється наступним чином. Для $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ і $z \in \mathbb{C}$ позначимо $M(w, z) := \sup\{|p(z)| \mid ||p||_w \leq 1, \ p \in \mathcal{P}[\mathbb{C}] \ \} = 1/\inf\{\|p\|_w \ \mid \ |p(z)| = 1, \ p \in \mathcal{P}[\mathbb{C}] \ \}$.

Теорема Холла — Мергеляна. *Нехай $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$. Якщо $\mathcal{P}$ є щільною множиною у C^0_w, то $M(\frac{w}{1+|x|}, z) = +\infty$ для довільного $z \in \mathbb{C} \setminus S_w$. Якщо існує така точка $z \in \mathbb{C}$, що $M(\frac{w}{1+|x|}, z) = +\infty$, то $\mathcal{P}$ є щільною множиною у C^0_w.*

У цьому ж сенсі перша теорема Гамбургера була розповсюджена на простори $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ спочатку у 1989 році В.Я.Левіним для мір μ, абсолютно неперервних відносно міри Лебега на прямій, а потім у 1996 році Кр.Бергом—для довільних мір $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$. Для $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{C}$ і $1 \leq p < \infty$ позначимо $\rho_p(\mu, z) := \inf\{\|P\|_{L_p(\mathbb{R}, (1+|x|)^{-p} d\mu)} \ \mid \ |P(z)| \ = 1, \ P \in \mathcal{P}[\mathbb{C}] \ \}$.

Теорема Левіна — Берга. *Нехай $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ і $1 \le p < \infty$. Якщо $\mathcal{P}$ є щільною у $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, то $\rho_p(\mu, z) = 0$ для довільного $z \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{supp}\mu$. Якщо існує таке $z \in \mathbb{C}$, що $\rho_p(\mu, z) = 0$, то $\mathcal{P}$ є щільною у $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$.*

У розділі 2 роботи аналогічні узагальнення зроблені для другої теореми Гамбургера.

Теорема 2.5 ([8])**.** *Нехай $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$. Алгебраїчні многочлени щільні у C_w^0 тоді і тільки тоді, коли має місце хоча б одна із таких рівностей: $M(\frac{w}{1+|x|}\,, 0) = +\infty$; $M(\frac{|x|}{1+|x|}\,w\,, 0) = +\infty$.*

Теорема 2.4 ([9])**.** *Нехай $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ і $1 \le p < \infty$. Алгебраїчні поліноми не є щільними у просторі $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ тоді і тільки тоді, коли $\rho_p(\mu, 0) > 0$ і $\rho_p(\mu^{(p)}, 0) > 0$.*

У 1956 році С.М.Мергелян довів, що для довільної функції $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ або алгебраїчні многочлени $\mathcal{P}$ щільні у напівнормованому просторі C_w^0, або ними можна наблизити по напівнормі $\|\cdot\|_w$ тільки ті функції $f : S_w \to \mathbb{R}$, які з області свого означення S_w можуть бути поширені на всю комплексну площину як цілі функції мінімального експоненційного типу. Цей клас цілих функцій був повністю описаний І.Хачатряном у 1963 році. За допомогою доведеної у Додатку Б теореми 2.8 [11] про повний опис поповнення напівнормованого простору C_w^0, у розділі 2 доведено таку теорему, яка дає повний опис всіх тих функцій, які можуть бути апроксимовані алгебраїчними многочленами по напівнормі $\|\cdot\|_w$ у випадку, коли ці многочлени є щільними у напівнормованому просторі C_w^0. Таким чином, наступна теорема доповнює вказану теорему С.М.Мергеляна.

Теорема 2.6 ([11])**.** *Нехай функція $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ задовольняє умову*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^n w(x) < \infty \ , \quad n \in \mathbb{N}_0 \ , \tag{17}$$

і алгебраїчні многочлени $\mathcal{P}$ щільні у напівнормованому просторі $C_{M_w}^0$. Тоді функція $f : S_w := \{x \in \mathbb{R} \,|\, w(x) > 0\} \ \to \ \mathbb{R}$ може бути апроксимована алгебраїчними многочленами по напівнормі $\|\cdot\|_w$, тобто

$$\exists \{P_n\}_{n\ge1} \ \subset \ \mathcal{P} \ : \lim_{n\to\infty} \ \sup_{x\in S_w} w(x)\,|P_n(x) - f(x)| \ = \ 0 \ ,$$

тоді і тільки тоді, коли ця функція може бути поширена на множину S_{M_w} як функція $f : S_{M_w} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє наступним умовам:

1) *для довільного $m \ge 1$ функція f є неперервною на замкненій множині $\left\{x \in \mathbb{R} \mid M_w(x) \ge \frac{1}{m}\right\}$;*

2) $\lim\limits_{M_w(x)\to 0} \; M_w(x)\cdot f(x) \;=\; 0$, *тобто* $\forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, \delta\, >0\;:$

$\{x\in\mathbb{R} \mid 0< \; M_w(x)<\delta\} \;\subseteq\; \{x\in S_{M_w} \mid M_w(x)\cdot|f(x)| \;<\varepsilon\}$.

Якщо множина S_w обмежена, то умова (17) виконується для довільної рівномірно обмеженої функції w і, по теоремі Вейєрштрасса, алгебраїчні многочлени $\mathcal{P}$ щільні у $C^0_{M_w}$. Тому для довільної рівномірно обмеженої невід'ємної функції w з обмеженим S_w умови 1 і 2 теореми 2.6 дають ваговий аналог теореми Вейєрштрасса про апроксимацію алгебраїчними многочленами. Слід відзначити, що для ваги $w(x)=\sqrt{1-x^2}\cdot\chi_{[-1,1]}(x)$ умови 1 і 2 теореми 2.6 еквівалентні умовам $f\in C((-1,1))$ і $\lim_{|x|\to 1}\sqrt{1-x^2}\cdot f(x) \;=0$. Цей факт відомий, він був одержаний Д.Левіатаном і І.А.Шевчуком у 1999 році.

Теорема 3.1 є частковим випадком більш загального результату, доведеного у сформульованій нижче теоремі 3.3. Для довільної $\mu\in\mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ узагальнюємо простори $L_p(\mathbb{R},d\mu)$, $0<p<\infty$, наступним чином. Нехай $\Phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ є строго зростаюча неперервна функція така, що $\lim_{x\to+\infty}1/\Phi(x)=\Phi(0)=0$. Тоді обернена до Φ функція, позначена як φ, має точно такі ж властивості. У лемі 3.1 [17] третього розділу доведено, що лінійний простір $L^\Phi(\mathbb{R},d\mu)$ всіх коплекснозначних борелівських функцій f, які задовольняють умову

$$\int_{\mathbb{R}}\Phi(\,n\,|\,f(x)\,|\,)\,d\mu(x)<+\infty\ ,\quad n=1,2,...\ ,$$

з локальною базою у нулі $U_n^{\Phi,\,\mu}:=\{f\in L^\Phi(\mathbb{R},d\mu)\mid ||\,\Phi(n|f|)\,||_{L_1(\mathbb{R},d\mu)}<1/n\}$, $n\in\mathbb{N}:=\{1,2,...\}$, є сепарабельним простором Фреше у сенсі Банаха при умові, що дві функції ототожнюються, як тільки вони рівні одна одній майже всюди щодо міри μ. У випадку $\Phi(x)=x^p$, $0<p<\infty$, маємо $L^\Phi(\mathbb{R},d\mu)=L_p\,(\mathbb{R},d\mu)$.

Щоб всі степеневі функції x^n, $n\in\mathbb{N}_0$, належали простору $L^\Phi(\mathbb{R},d\mu)$ розглядаємо множину $\mathcal{M}^*_\Phi(\mathbb{R})$ всіх мір в $\mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ таких, що $s_n^\Phi(\mu):=\int_{\mathbb{R}}\Phi(|x|^{\,n})\,d\mu(x)<\infty$ для всіх $n\in\mathbb{N}_0$. Позначимо через $\mathcal{W}^*_\Phi(\mathbb{R})$ множину всіх тих невід'ємних, рівномірно обмежених і напівнеперервних зверху на $\mathbb{R}$ функцій w, які задовольняють умову $\lim_{|x|\to+\infty}w(x)$ $\Phi(|x|^{\,n})=0$ для всіх $n\in\mathbb{N}_0$.

У третьому розділі роботи доведено, що для кожної міри $\mu\in\mathcal{M}^*_\Phi(\mathbb{R})$ з обмеженим носієм алгебраїчні поліноми є щільними у просторі $L^\Phi(\mathbb{R},d\mu)$, а у випадку необмеженого носія має місце таке твердження.

Теорема 3.3 ([17]). *Нехай $\mu \in \mathcal{M}^*_\Phi(\mathbb{R})$ має необмежений носій. Множина алгебраїчних поліномів $\mathcal{P}$ є щільною у просторі $L^\Phi(\mathbb{R}, d\mu)$ тоді і тільки тоді, коли $d\mu(x) = w(x)\,d\nu(x)$, де $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$, а $w \in \mathcal{W}^*_\Phi(\mathbb{R})$ є такою, що $\mathcal{P}$ є щільною у всіх напівнормованих просторах $C^0_{w_n}$, $n \in \mathbb{N}$, де*

$$w_n(x) := 1/\varphi\big(\tfrac{1}{n \cdot w(x)} \big) \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \tag{18}$$

φ є обернена функція до Φ і вважаємо, що $1/0 := +\infty$, $1/+\infty := 0$.

Додаткові обмеження на Φ істотно спрощують умови теореми 3.3 у наступному наслідку.

Наслідок 3.1 ([17]). *Нехай $\mu \in \mathcal{M}^*_\Phi(\mathbb{R})$ має необмежений носій і існує така стала $\lambda > 1$, що*

$$\varliminf_{x \to +\infty} \ \frac{\Phi(\lambda \cdot x)}{\Phi(x)} > 1 \ . \tag{19}$$

Тоді $\mathcal{P}$ є щільною у $L^\Phi(\mathbb{R}, d\mu)$ тоді і тільки тоді, коли існує міра $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ і вага $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ такі, що

$$d\mu(x) = \frac{d\nu(x)}{\Phi\big(\frac{1}{w(x)} \big)} \quad ,$$

і $\mathcal{P}$ є щільною у C^0_w.

У 1922 році Т.Карлеманом було отримано достатні умови визначеності міри із $\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ у сенсі Гамбургера і Стілтьєса, які отримали назву умов Карлемана, а відповідні міри, які їм задовольняють, стали зватися карлеманівськими. Кожній мірі $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ поставимо у відповідність число $b(\mu) \in \{1, 2\}$ таким чином, що $b(\mu) := 1$, якщо носій міри $\operatorname{supp}\mu$ є необмеженим в обох напрямках, і $b(\mu) := 2$ у іншому випадку. Говорять, що міра $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ задовольняє *умову Карлемана* (чи зветься *карлеманівською мірою*) тоді і тільки тоді, коли

$$\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} |\, s_{2k}(\mu)|^{\,-1/(\,2b(\mu)k\,)} = \infty \ . \tag{20}$$

Множина карлеманівських мір позначається через $\mathcal{M}^*_C(\mathbb{R})$. У контексті проблем моментів умови Карлемана вивчалися І.Шохатом, І.Тамаркіним (1950), С.Мандельбройтом (1951), В.Фуксом (1956), Д.Грінштейном (1962), С.Хейдом (1963), Т.Сйодіним (1987), Кр.Бергом і М.Тхілом (1991), Б.Коренблюмом, А.Маскулі і І.Панарелло (1998) та ін. У контексті поліноміальної щільності для карлеманівських мір Кр.Берг і Ж.Крістенсен у 1983 році одержали такий результат.

Теорема Берга — Крістенсена. *Якщо міра μ є карлеманівською, то алгебраїчні поліноми є щільними у просторі $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ для довільного $1 \le p < \infty$.*

Тут слід зазначити, що кожна міра μ із $\mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ з обмеженим носієм є карлеманівською мірою і алгебраїчні поліноми є щільними у всіх просторах $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ автоматично. Тому твердження цієї теореми є істотним тільки для мір з необмеженим носієм. Крім того, ця теорема істотно посилює початкове твердження Т.Карлемана про те, що кожна міра, моменти якої задовольняють умову (20), є визначеною у сенсі Стілтьєса, якщо $b(\mu) = 2$, і у сенсі Гамбургера, якщо $b(\mu) = 1$, а це, у свою чергу, завдяки (6) і (7), є еквівалентним поліноміальній щільності, але тільки у відповідному просторі L_2. У пункті 3.3 третього розділу дисертації одержано таке підсилення теореми Берга — Крістенсена:

$$\mu \in \mathcal{M}^*_C(\mathbb{R}) \Rightarrow \ \mathcal{P} \text{ є щільною у } L_p\Big(\mathbb{R},\ e^{A|x|^{(1-\varepsilon)/b(\mu)}}\, d\,\mu(x)\Big) \qquad (21)$$

для довільних $1 \le p < \infty$, $A \ge 0$ і $\varepsilon \in (0, 1)$.

На семінарі № 160 інституту біоматематики та біометрії міста Мюнхен, Німеччина, у травні 1999 року, де автор доповідав результати роботи [23], професор Аджіт Ікбал Сінгх університету міста Делі, Індія, поставила питання про аналітичний опис тих мір $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у всіх просторах $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, $1 \le p < \infty$, одночасно. Відповідь на це питання було знайдено автором у 2005 році у такій теоремі.

Теорема 3.7 ([12])**.** *Нехай міра $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ має необмежений носій. Алгебраїчні поліноми $\mathcal{P}$ є щільними у всіх просторах $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, $1 \le p < \infty$, одночасно тоді і тільки тоді, коли існує така вага $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ і міра $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$, що*

$$\mu(A) = \int_A w(x)\, d\nu(x)\ , \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ , \qquad (22)$$

і алгебраїчні поліноми $\mathcal{P}$ є щільними у всіх просторах $C^0_{w^\rho}$, $0 < \rho < \infty$, одночасно.

Для $p \in (0, +\infty)$ позначимо через $\mathcal{M}^*_p(\mathbb{R})$ і $\mathcal{W}^*_p(\mathbb{R})$ клас тих мір $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ і ваг $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у просторі $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ і $C^0_{w^p}$ відповідно. Згідно з нерівністю Гельдера і рівномірною обмеженістю ваг із $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ маємо такі вкладення

$$\mathcal{M}^*_p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}^*_q(\mathbb{R})\ ,\ \mathcal{W}^*_q(\mathbb{R}) \subset \mathcal{W}^*_p(\mathbb{R})\ ,\ 0 < q < p < +\infty\ .$$

У позначеннях $\mathcal{M}_\infty^*(\mathbb{R}) := \cap_{p\geq 1}\mathcal{M}_p^*(\mathbb{R})$ і $\mathcal{W}_0^*(\mathbb{R}) := \cap_{\ p>0}\ \mathcal{W}_p^*(\mathbb{R})$, теорема Берга — Крістенсена стверджує, що $\mathcal{M}_C^*(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_\infty^*(\mathbb{R})$, а теорема А для ваг із $\mathcal{W}_0^*(\mathbb{R})$ може бути модифікована в такий спосіб.

Теорема 3.9 ([12])**.** *Для $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ нехай S_w є необмеженою множиною. Алгебраїчні поліноми $\mathcal{P}$ не є щільними у всіх просторах $C_{w^\rho}^0$, $0 < \rho < \infty$, одночасно тоді і тільки тоді, коли існують така ціла трансцендентна функція B нульового експоненційного типу, що всі її нулі Λ_B є простими і дійсними, $\Lambda_B \subseteq S_w$, і така стала $C > 0$, що*

$$w(\lambda) \geq |B'(\lambda)|^{-C}\ , \quad \lambda \in \Lambda_B\ . \tag{23}$$

Теорема 3.9 доповнює теорему 3.7 так само, як теорема А доповнює теорему 3.1. Як показано у третьому розділі роботи, із умови $\mu \in \mathcal{M}_\infty^*(\mathbb{R})$ випливає набагато більше, ніж стверджується у теоремі 3.7. А саме [12],

$$\mu \in \mathcal{M}_\infty^*(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{W}_0^*(\mathbb{R}) : 1/w \in \cap_{p\geq 1} L_p\left(\mathbb{R}, d\mu\right)\ . \tag{24}$$

Якщо для довільної міри $\mu \in \mathcal{M}_\infty^*(\mathbb{R})$ і довільної заданої неперервної на $\mathbb{R}$ функції f, яка для деякого $m \in \mathbb{N}$ задовольняє умову $f(x) = \mathcal{O}(|x|^m)$ при $x \to \pm\infty$, знайти функцію $w \in \mathcal{W}_0^*(\mathbb{R})$, що відповідає мірі μ по (24), а потім апроксимувати f у просторі C_w^0 поліноміальною послідовністю $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, то, як зазначено у наслідку 3.4 [12] третього розділу роботи, послідовність $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ завдяки очевидної нерівності

$$\|f - P_n\|_{L_p(\mathbb{R},d\mu)}\ \leq\ \|1/w\|_{L_p(\mathbb{R},d\mu)}\ \|f - P_n\|_w\ ,\ 1 \leq p < \infty\ , \tag{25}$$

буде здійснювати одночасну поліноміальну апроксимацію f у всіх просторах $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$.

Із множини $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ виділимо підмножину Ψ таких ваг, які можуть бути представлені у вигляді $w(x) = (\sum_{n\geq 0} a_{2n}x^{2n})^{-1}$ з $a_0 > 0$, $a_{2n} \geq 0$ для всіх $n \geq 1$, $a_{2n} > 0$ для нескінченної кількості n і $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[2n]{a_{2n}} = 0$. Для довільного $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ покладемо $\sigma_w(n) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^n w(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$. У 1951 році С.Н.Бернштейн встановив, що умова аналогічна умові Карлемана (20): $\sum_{n\geq 1} \sigma_w(n)^{-1/n} = \infty$ є достатньою для щільності алгебраїчних поліномів у просторі C_w^0, а при $w \in \Psi$ є також і необхідною. Цей результат С.Н.Бернштейна було використано для одержання аналітичного зображення всіх карлеманівських мір. А саме, якщо міра μ є карлеманівською, тобто належить до більш вузької, ніж $\mathcal{M}^*_\infty(\mathbb{R})$, множини $\mathcal{M}^*_C(\mathbb{R})$, то ваги як у теоремі 3.7, так і у еквівалентності (24), можна знайти у явному вигляді. Для довільної $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ нехай $\mathcal{R}(\mu) := \{\mathbb{R}\}$, якщо $b(\mu) = 1$, і $\mathcal{R}(\mu) := \{\,[a,+\infty), (-\infty,a] \mid a \in \mathbb{R}\}$, якщо $b(\mu) = 2$.

Теорема 3.10 ([12]). 1. *Якщо $\mu \in \mathcal{M}^*_C(\mathbb{R})$ має необмежений носій то існує така $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$, що $\operatorname{supp}\nu = \operatorname{supp}\mu$ і $d\mu := \ w(x)\,d\nu$, де $w(x)^{-1} := \sum_{n\ge 0} \frac{x^{2n}}{2^n s_{2n}(\mu)}$ і $w \cdot \chi_J \in \mathcal{W}^*_0(\mathbb{R})$ для кожного $J \in \mathcal{R}(\mu)$.*

2. *Для довільної міри $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ з необмеженим носієм і довільної послідовності невід'ємних чисел $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, яка задовольняє умовам: $a_0 > 0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = 0$ і $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{2n}^{1/(2b(\nu))} = \infty$, міра $d\mu := \ w(x)\,d\nu$ із $w(x) = (\sum_{n\ge 0} a_{2n}x^{2n})^{-1}$ є карлеманівською і $w \cdot \chi_J \in \mathcal{W}^*_0(\mathbb{R})$ для кожного $J \in \mathcal{R}(\mu)$.*

У теоремі 3.11 [12] третього розділу роботи було доведено, що для кожної міри $\mu \in \mathcal{M}^*_C(\mathbb{R})$ існує така підпослідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k\ge 1}$ (у лемі 3.8 вона побудована конструктивно), що вага

$$w_\mu(x) := \Big(1 + \sum\nolimits_{k\ge 1} \ \frac{x^{2k}}{2^k\, s_{\,2n_k}(\mu)^{\,k/n_k}}\Big)^{-1}$$

задовольняє умовам (24), тобто $1/w_\mu \ \in \cap_{p\ge 1} L_p\,(\mathbb{R}, d\mu)$ і $w_\mu \cdot \chi_J \in \mathcal{W}^*_0(\mathbb{R})$ для всіх $J \in \mathcal{R}(\mu)$. Таким чином, у випадку карлеманівської міри μ одночасна поліноміальна апроксимація (25) буде здійснюватися за рахунок побудови поліноміальної апроксимації f у просторі C^0_w з конструктивно побудованою за мірою μ вагою $w = w_\mu$.

Незважаючи на серйозні зусилля багатьох відомих математиків, питання одержання конструктивного розв'язку проблеми С.Н.Бернштейна і досі залишається відкритим. Один із сучасних напрямків подальшого дослідження цього питання базується на тій обставині, що для одержання конструктивного опису всіх ваг із $\mathcal{W}^*_1(\mathbb{R})$ достатньо одержати те ж саме для деякої підмножини X із класу $\mathcal{W}^*_1(\mathbb{R})$ з такою властивістю: для кожної ваги $w \in \mathcal{W}^*_1(\mathbb{R})$ існує більша вага $\omega \in X \subset \mathcal{W}^*_1(\mathbb{R})$, тобто $w(x) \le \omega(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Звичайно, що ваги із X повинні мати додаткові спеціальні властивості, які б допомогли одержати їх конструктивний опис.

На сьогодні відомий такий розподіл $\mathcal{W}^*_1(\mathbb{R})$ на два класи ваг із особливими властивостями. Вагу $w \in \mathcal{W}^*_1(\mathbb{R})$ називають *регулярною*, якщо $(1 + |\,x\,|\,)^{\,n}\, w(x) \in \mathcal{W}^*_1(\mathbb{R})$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. А інакше, $w \in \mathcal{W}^*_1(\mathbb{R})$ називають *сингулярною.* У 1956 році С.М.Мергеляном було показано що всі сингулярні ваги є дискретними, а їх повний опис було знайдено у 1998 році А.А.Борічевим і М.Содіним. У 1996 році М.Содін довів, що для довільної регулярної ваги w в $\mathcal{W}_1^*(\mathbb{R})$ і довільного $\delta > 0$ більша, строго додатна на всій дійсній осі вага $w + e^{-\delta\,|\,x\,|}$ також належить до $\mathcal{W}_1^*(\mathbb{R})$ і є регулярною. У Додатку Д дисертаційної роботи доведено таку теорему.

Теорема 3.5 ([15]). *Нехай вага $w \in \mathcal{W}_1^*(\mathbb{R})$ є регулярною. Тоді існує більша регулярна вага $\omega \in \mathcal{W}_1^*(\mathbb{R})$ така, що алгебраїчні многочлени $\mathcal{P}$ не є щільними у $C^{\,0}_{\omega^\theta}$ для довільного $\theta \in (0,1)$.*

Для кожного $1 \le p < \infty$ існує аналогічний розподіл мір, який відповідає класам $\mathcal{M}_p^*(\mathbb{R})$. А саме, при $1 \le p < \infty$ міру $\mu \in \mathcal{M}_p^*(\mathbb{R})$ називають *p-регулярною*, якщо $\mathcal{P}$ є щільною множиною у $L_p(\mathbb{R}, (1+|x|)^{p\,n} d\mu)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, а коли ні, то її називають *p-сингулярною*. Всі p-сингулярні міри є дискретними і їх повний опис було одержано у 1998 році А.А.Борічевим і М.Содіним. Аналогічне теоремі 3.5 твердження для мір доведено у Додатку Д дисертаційної роботи.

Теорема 3.6 ([15]). *Нехай $1 \le p < \infty$ і $\mu \in \mathcal{M}_p^*(\mathbb{R})$ є p-регулярною. Тоді існує p-регулярна міра $\nu \in \mathcal{M}_p^*(\mathbb{R})$ така, що $\mu(A) \le \nu(A)$ для довільної $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ і алгебраїчні многочлени $\mathcal{P}$ не є щільними у $L_q(\mathbb{R}, d\nu)$ для довільного $q > p$.*

Доведення Л. де Бранжа теореми А, доведення її поліноміальної форми (2), а також доведення леми 3.6 і теореми 3.1 істотно використовували умови можливості розвинення оберненої величини цілої функції на прості дроби. Тому особлива увага в дисертаційній роботі була приділена знаходженню нових достатніх і необхідних умов такого розвинення.

Для досягнення цієї мети результати про поведінку цілих і мероморфних функцій, одержані В.Бернштейном (1933), І.В.Островським (1970) і А.Баєрштейном II (1974), було застосовано для послаблення умов розвинення на прості дроби оберненої величини цілої функції, які раніше були знайдені М.Г.Крейном (1947), Б.Я.Левіним (1956), Л. де Бранжем (1959), П.Кусісом (1988) і Г.Педерсеном (1995). Основні результати стосовно цих питань сформульовано у другому розділі роботи, а їх доведення розміщені у Додатку А.

Далі для цілої функції f позначатимемо через Λ_f множину всіх нулів f, через ρ_f — її порядок, і нехай $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^+) := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \subset \mathbb{R}^+ ,\ \overline{\lim}_{r\to+\infty} m([0,r] \cap A)/r = 0\}$, де m — міра Лебега на $\mathbb{R}$. Для довільного $q \in \mathbb{Z}$ введемо клас $\mathcal{E}_q^S$ таких трансцендентних цілих функцій f скінченного порядку, які мають тільки прості нулі і $\sum_{\lambda\in\Lambda_f}(1+|\lambda|)^{-q-1}|f'(\lambda)|^{-1} < \infty$. Будемо казати, що ціла функція f належить класу $\mathcal{K}^q$, якщо $f \in \mathcal{E}_q^{\mathrm{S}}$ і у випадку $q \leq 0$ для $\Phi = f$ має місце рівність $1/\Phi(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda_\Phi}\Phi'(\lambda)^{-1}(z-\lambda)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\Lambda_\Phi$, а якщо $q \geq 1$, то існує такий поліном P степеня q, у якого всі корені прості і належать множині $\mathbb{C}\setminus\Lambda_f$, а попередня рівність має місце для $\Phi = f\cdot P$. Нагадаємо, що класом Картрайт зветься клас цілих функцій експоненційного типу, які задовольняють умову: $\int_{\mathbb{R}}(1+x^2)^{-1}\cdot\big|\log|f(x)|\big|\,dx < \infty$, а класом A — клас тих цілих функцій f, нулі яких задовольняють умову $\sum_{\lambda\in\Lambda_f\setminus\{0\}}|\operatorname{Im} 1/\lambda| < \infty$.

Результати М.Г.Крейна (1947), Б.Я.Левіна (1956) і Л. де Бранжа (1959) є частковими випадками такої теореми.

Теорема 2.4 ([20]). *Нехай $q \in \mathbb{Z}$ і $f \in \mathcal{E}_q^{\mathrm{S}}$. Функція f належить класу $\mathsf{A}\cap\mathcal{K}^q$ тоді і тільки тоді, коли f належить класу Картрайт і існує така множина $E \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^+)$ і таке число $N \in \mathbb{N}_0$, що $|y|^N\cdot|f(iy)| \to +\infty$ при $|y| \to +\infty$, $|y| \in \mathbb{R}^+\setminus E$.*

Використання теореми В.Бернштейна (1933) про уточнений порядок разом з результатами робіт А.Баєрштейна II (1974) і І.В.Островського (1970) дало можливість довести таке твердження. Позначимо через $[x]$ цілу частину дійсного числа x.

Теорема 2.5 ([20]). *Нехай $q \in \mathbb{Z}$ і ціла функція $f \in \mathcal{E}^{\mathrm{S}_q}$ має скінченний порядок ρ_f.*

1. *Якщо існує $n \geq [2\rho_f]+1$ точок $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < 2\pi$ ($\rho_f \geq 1$ тягне $n \geq 3$), які задовольняють умови*

$$\varphi_{k+1}-\varphi_k < \pi/\rho_f\ ,\ 1 \leq k \leq n-1\ ,\ 2\pi+\varphi_1-\varphi_n < \pi/\rho_f\ ,$$

і існує таке число $N \in \mathbb{N}_0$, що

$$r^N\cdot|f(re^{i\varphi_k})| \to +\infty \text{ при } r \to +\infty\ ,\ r \in \mathbb{R}^+\setminus E_k\ ,\ \ 1 \leq k \leq n\ , \tag{26}$$

із деякими $E_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq k \leq n$, то f належить класу $\mathcal{K}^q$.

2. *Якщо f належить класу $\mathcal{K}^q$, то для кожного $\theta \in (-\pi,\pi]$ існує така множина $E_\theta \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^+)$, що*

$$r^{1+q+[\rho_f]}\cdot f(re^{i\theta}) \to \infty \text{ при } r \to +\infty\ ,\ \ r \in \mathbb{R}^+\setminus E_\theta\ ;$$

причому $\cup_{\theta\in(-\pi,\pi]}E_\theta \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^+)$ і $E_\theta = \emptyset$ для майже всіх $\theta \in (-\pi,\pi]$ відносно міри Лебега m.

Для $\rho_f = 1$ і $\Lambda_f \subset \mathbb{R}$ перша частина теореми 2.5 співпадає з відомою теоремою Кусіса (1988) при $n = 4$. Хоч додаткова умова $\Lambda_f \subset \mathbb{R}$ веде не тільки до належності f до класу A і можливості застосувати тут теорему 2.4, але і до більш істотних послаблень вимог до функції f, які містяться у роботі автора [28](2001) і В.Б.Шерстюкова (2007). Інший вигляд необхідної і достатньої умови належності $f \in \mathcal{E}^{\mathsf{S}_q}$ до класу $\mathcal{K}^q$ при $\rho_f \leq 1$ було запропоновано у 2009 році В.Б.Шерстюковим. Але, на відміну від теореми 2.5, головною метою якої є зведення до мінімуму кількості променів, де треба перевіряти поведінку функції f, умови В.Б.Шерстюкова вимагають перевірити невід'ємність її індикаторної функції.

У 1944-1954 роках А.Л.Шагінян і М.М.Джрбашян розглядали узагальнення проблеми С.Н.Бернштейна для підмножин комплексної площини. Позначимо через (N) множину всіх таких додатних і спадаючих функцій $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, що $\sup_{x \geq 0} |x|^n h(x) < \infty$, $n \in \mathbb{N}_0$, і функція $\log(1/h(e^x))$ є опуклою на $\mathbb{R}$. Для даної функції $h \in (N)$ і замкненої ніде не щільної і необмеженої множини $E \subset \mathbb{C}$ розглянемо оснащений нормою $\|f\|_h := \sup_{z \in E} h(|z|)|f(z)|$ простір $C_h^0(E)$ всіх функцій $f : E \to \mathbb{C}$, які є неперервними на E і задовольняють умову $\lim_{z \in E\,,\,|z| \to \infty} h(|z|)f(z) = 0$. Коли $E = \mathbb{R}$, $C_h^0(E)$ співпадає з введеним вище простором C_w^0 із $w(x) = h(|x|)$, $x \in \mathbb{R}$. Ваги $h(|x|)$, коли h пробігає клас (N), формують єдину відому на сьогодні підмножину ваг $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$, для якої проблема С.Н.Бернштейна одержала остаточний конструктивний розв'язок. А саме, у 1937 році С.Ізюма і Т.Кавата встановили, що за умови представлення ваги $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ у вигляді $w(x) = h(|x|)$, $x \in \mathbb{R}$, $h \in (N)$, алгебраїчні поліноми є щільними у C_w^0 тоді і тільки тоді, коли $\int_{\mathbb{R}} \frac{\log 1/w(x)}{1+x^2}\, dx = +\infty$. У 1954 році М.М.Джрбашян одержав аналог цього твердження для $C_h^0(E)$ у випадку, коли $h \in (N)$, а E належить до спеціальних класів підмножин $\mathbb{C}$. Зокрема, коли $E = \partial\mathcal{S}$, де $\partial\mathcal{S} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im} z| = 1 \}$ позначає межу смуги $\mathcal{S} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im} z| < 1 \}$, ним було доведено, що щільність алгебраїчних поліномів у $C_h^0(E)$ еквівалентна умові

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi x}{2}} \log \frac{1}{h(x)}\, dx = +\infty\ . \tag{27}$$

Для області Ω комплексної площини позначимо через $\mathrm{Hol}(\Omega)$ множину голоморфних на Ω функцій і нагадаємо, що для $0 < p < \infty$ клас Харді $H^p(\mathcal{D})$ на одиничному крузі $\mathcal{D}$ означається як множина тих $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D})$, які задовольняють умову

$$||f||^p_{H^p(\mathcal{D})} := \sup_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\, f\,(\,r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,)\,|^{\,p}\,d\theta < +\infty\ ,$$

а клас Харді $H^p(\mathcal{S})$ на смузі $\mathcal{S}$ — як сукупність всіх $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{S})$, для яких $f \circ \phi^{-1} \in H^p(\mathcal{D})$ із $\phi(z) := \mathrm{th}\frac{\pi}{4}\,z$, причому

$$||\,f\,||^p_{H^p(\mathcal{S})} := ||f \circ \phi^{-1}||^p_{H^p(\mathcal{D})} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t-i)|^p+|f(t+i)|^p}{2}\,\mathcal{w}\,(t)dt\ ,$$

де $\mathcal{w}\,(x) := 1/(2\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}\,x)$. Із очевидної нерівності $(4/\pi)||\,f\,||^p_{H^p(\mathcal{S})} \le \|f_i\|^p_{h_p} + \|f_{-i}\|^p_{h_p}$, де $h_p(x) := (1+x^2)^{1/p}\mathcal{w}(x)^{1/p} \in (N)$, $f_{iy}(x) := f(x+iy)$, $x, y \in \mathbb{R}$, і вищезгаданого результату М.М.Джрбашяна не випливає поліноміальна щільність у просторі $H^p(\mathcal{S})$, тому що вага h_p не задовольняє умову (27), а отже, алгебраїчні поліноми не є щільними у $C^0_{h_p}(\partial\mathcal{S})$. Але справедлива наступна теорема, доведення якої, як і доведення сформульованих нижче теорем 3.15 і 3.16, розміщено у Додатку B.

Теорема 3.14 ([14])**.** *Для довільного p, $0 < p < \infty$, множина алгебраїчних поліномів є щільною у $H^p(\mathcal{S})$.*

Вивчення поліноміальної щільності у просторах $H^p(\mathcal{S})$ було спричинено встановленими Ст.Кайсером у 1999 році простих рекурентних співвідношень для послідовностей ортогональних многочленів у просторах $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{w}(x)dx)$ і $H^2(\mathcal{S})$, які дозволили довести, що функції $e^{z\cdot\mathrm{arctg}x}/\sqrt{1+x^2}$ і $e^{z\cdot\mathrm{arctg}x}$ є відповідними твірними функціями цих послідовностей. Але якщо щільність алгебраїчних поліномів у просторі $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{w}(x)dx)$ була очевидним наслідком вищезгаданої теореми Ізюмі — Кавата, то у просторі $H^2(\mathcal{S})$ те ж саме питання було на той час відкритим. Зауважимо, що послідовності таких поліномів належать до більш загальної сукупності так званих многочленів Мейкснера — Полачека, і грунтовне дослідження цих послідовностей було здійснено Т.Араєм у 2004 році.

Можливість знаходження у явному вигляді розв'язку крайової задачі: $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{S})$, $\mathrm{Re}f(x \pm i) = -\log\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}x$, $x \in \mathbb{R}$, $(f(z) = -\log 2\mathrm{ch}^2\frac{\pi}{4}z)$ дозволило знайти зручний внутрішній опис просторів $H^p(\mathcal{S})$ і записати у явній формі ізоморфізм між просторами $H^p(\mathcal{S})$ і $H^p_\tau(\mathcal{S})$, де $H^p_\tau(\mathcal{S})$ є простором всіх $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{S})$, для яких

$$\|f\|^p_{H^p_\tau(\mathcal{S})} := \sup_{0\le y<1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(-iy+t)|^p+|f(iy+t)|^p}{2}\,dt < \infty\ .$$

Теорема 3.16 ([14]). *Нехай* $0 < p < \infty$ *і* $\mathbb{W}(z) := 1/\left(4\mathrm{ch}^2 \frac{\pi}{4} z\right)$. *Простори* $H^p(\mathcal{S})$ *і* $H^p_\tau(\mathcal{S})$ *ізометрично ізоморфні. Ізоморфізм дається домноженням на відповідний степінь функції* $\mathbb{W}$. *Більш точно, якщо* $f \in H^p(\mathcal{S})$, *то* $g = \mathbb{W}^{\frac{1}{p}} f \in H^p_\tau(\mathcal{S})$ *з рівністю норм*

$$|| f ||_{H^p(\mathcal{S})} = || g ||_{H^p_\tau(\mathcal{S})} \ , \tag{28}$$

і навпаки, якщо $g \in H^p_\tau(\mathcal{S})$, *то* $f = \mathbb{W}^{-\frac{1}{p}} g \in H^p(\mathcal{S})$ *з рівністю норм* (28).

Позначимо через $H^p_{\mathbb{W}}(\mathcal{S})$ простір всіх тих $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{S})$, для яких

$$|| f ||^p_{H^p_{\mathbb{W}}(\mathcal{S})} := \sup_{0 \le y < 1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t-iy)|^p + |f(t+iy)|^p}{4\left(\mathrm{ch}\, \frac{\pi}{2}\, t + \cos \frac{\pi}{2}\, y\right)}\, dt < \infty \ .$$

Теорема 3.15 ([14]). *Для кожного* $p \in (0, \infty)$ *простори* $H^p(\mathcal{S})$ *і* $H^p_{\mathbb{W}}(\mathcal{S})$ *ідентичні з рівними нормами, тобто* $H^p(\mathcal{S}) = H^p_{\mathbb{W}}(\mathcal{S})$ *і* $|| f ||_{H^p(\mathcal{S})} = || f ||_{H^p_{\mathbb{W}}(\mathcal{S})} \ \ \forall \ f \in H^p(\mathcal{S})$.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено частковому розв'язку проблеми Карліна про нуле-зменшуючі послідовності. Для довільної послідовності дійсних чисел $\gamma = \{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, сукупність яких позначатимо через $\mathbb{R}^\infty$, означимо на лінійному просторі $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ алгебраїчних многочленів з дійсними коефіцієнтами лінійне перетворення T_γ за такою формулою: $T_\gamma x^n = \gamma_n x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Послідовності $\gamma \in \mathbb{R}^\infty$, для яких многочлен $T_\gamma p$ має тільки дійсні нулі кожного разу, коли $p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$ має тільки дійсні нулі, називають *послідовностями множників першого роду* і їх множина позначається через α. Для $p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$ і $A \subset \mathbb{C}$ через $\mathbb{Z}_A(p)$ позначимо кількість нулів p, які належать множині A і обчислюються з врахуванням їх кратностей, причому $\mathbb{Z}_A(a) = 0$ для довільного $a \in \mathbb{R}$. Послідовність дійсних чисел $\gamma := \{\gamma_n\}_{n \ge 0} \in \mathbb{R}^\infty$ зветься *нуле-зменшуючою послідовністю*, якщо $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}(T_\gamma p) \le \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}(p)$ для довільного $p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$, і вона не має вигляду $(a, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ з деяким $a \in \mathbb{R}$. Множина нуле-зменшуючих послідовностей позначається через τ. Підмножини α і τ, які складаються із послідовностей, які містять тільки додатні члени, позначаються як α^+ і τ^+ відповідно. Треба зауважити, що із $\gamma := \{\gamma_n\}_{n \ge 0} \in \tau$ випливає $c\gamma := \{c\gamma_n\}_{n \ge 0} \in \tau$ для $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $\gamma^* := \{(-1)^n \gamma_n\}_{n \ge 0} \in \tau$. Більше того, якщо одна з послідовностей $\gamma, -\gamma, \gamma^*, -\gamma^*$ належить до τ, то до τ належать і всі інші послідовності, і одна з них має тільки додатні члени. Тому достатньо вивчати лише послідовності із τ^+.

У 1914 році Г.Поліа і І.Шур встановили, що $\gamma \in \alpha$ тоді і тільки тоді, коли ряд $\Phi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} x^k$ є цілою функцією і $\Phi(x)$ або $\Phi(-x)$ при деяких $c \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}_0$ може бути представлена у вигляді $c \cdot x^m \phi(x)$, де $\phi \in L_1 := \cup_{b \in \mathbb{R}^+} L_1(b)$ і

$$L_1(b) := \Big\{ \mathrm{e}^{bx} \prod_{k \geq 1} \Big(1 + \tfrac{x}{\alpha_k} \Big) \mid 0 < \alpha_k \leq +\infty, \ \sum_{k \geq 1} \tfrac{1}{\alpha_k} < \infty \Big\}, b \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

Нехай L_2^+ (L_2) позначає клас цілих функцій, які мають зображення

$$\mathrm{e}^{-a^2 x^2 + bx} \prod\nolimits_{k \geq 1} \big(1 + \tfrac{x}{\alpha_k} \big) \mathrm{e}^{-\frac{x}{\alpha_k}} \ , \quad (30)$$

при $a, b \in \mathbb{R}$, $\sum_{k \geq 1} \alpha_k^{-2} < \infty$ і $0 < \alpha_k \leq +\infty$ $(\alpha_k \in \mathbb{R})$. У 1884 році Е.Лагерр довів, що для кожної цілої функції $\Phi \in L_2^+$ має місце $\{1/\Phi(n)\}_{n \geq 0} \in \tau^+$. Аналоги і узагальнення цієї теореми Лагерра одержали Г.Поліа (1929), Н.Обрешков (1939), Л.Вейснер (1942) і М.Марден (1943, 1966). У 1968 році С.Карлін поставив наступне питання (яке одержало назву проблеми Карліна): чи існують нуле-зменшуючі послідовності іншого вигляду ? Якщо для довільної дійсної послідовності γ із ненульових членів через $1/\gamma$ позначити послідовність $\{1/\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, то безпосередньо із означення випливає, що $1/\tau \subset \alpha$, і зокрема, для довільної $\gamma \in \tau^+$ має місце належність

$$\Phi_{1/\gamma}(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\gamma_k \cdot k!} \in L_1 \ . \quad (31)$$

У 1980 році Т.Кревен і Дж.Шордаш опублікували розв'язок проблеми Карліна, який стверджував, що $1/\tau^+ = \alpha^+$, і потім, у 1981-1983 роках вони використали цю рівність для доведення різних її наслідків. Цей розв'язок було також використано у роботі М.Костової, І.Касандрової (1982) і монографії Л.Ілієва (1987). Помилковість цього розв'язку проблеми Карліна була встановлена у 1992 році у роботі [2], де було доведено, що $\alpha^+ \setminus (1/\tau^+) \neq \emptyset$, і з цього року проблема Карліна знову виявилась відкритою.

У ряді робіт замість класу τ нуле-зменшуючих послідовностей розглядається клас τ_c комплексно нуле-зменшуючих послідовностей $\gamma \in \mathbb{R}^\infty$, які задовольняють нерівності $\mathbb{Z}_c(T_\gamma p) \leq \mathbb{Z}_c(p)$ $\forall$ $p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$, де $Z_c := Z_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$. У випадку, коли $\deg T_\gamma p = \deg p$ для всіх $p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$, $\gamma \in \tau_c$ еквівалентно $\mathbb{Z}_\mathbb{R}(T_\gamma p) \geq \mathbb{Z}_\mathbb{R}(p)$ $\forall$ $p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$. Тому $1/\tau \subset \tau_c$, але Т.Кревен і Дж.Шордаш у 1995 році довели, що $\tau_c \setminus (1/\tau) \neq \emptyset$.

Безпосереднім узагальненням проблеми С.Карліна про нуле-зменшуючі послідовності є задача вивчення всіх можливих лінійних перетворень T лінійного простору $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ алгебраїчних многочленів з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють нерівності

$$\mathbb{Z}_c(Tp) \le \mathbb{Z}_c(p) \quad \forall\, p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}] \ . \tag{32}$$

Якщо $T = D = \frac{d}{dx}$, то (32) є наслідком теореми Ролля. Якщо $q(x)$ є дійсним поліномом тільки з дійсними нулями і $T = q(D)$, то (32) співпадає з класичною теоремою Ерміта (1866) — Пулена (1867). Інші лінійні перетворення із властивістю (32) вивчалися Г.Поліа і Г.Сеге (1914), Н.Обрешковим (1963), Д.Уідером (1971), Л.Ілієвим (1989) та ін. У 2002 році А.Пінкус, І.Карнісер і Ш.Пен розглянули довільне перетворення вигляду $Tx^n := x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n,k}x^k$ для дійсних $b_{n,k}$ і довели, що перетворення такого вигляду задовольняє (32) тоді і тільки тоді, коли $T = F(D)$ для деякої $F \in L_2$.

Подальші узагальнення і застосування вищезгаданих результатів розглядалися у статтях Е.Ліба, А.Сокала (1981), Ю.В.Козицького (1984), Р.О.Мельника (1990), А.Айзерлета, С.Норсета (1990), Е.Сафа, А.Айзерлета, С.Норсета (1991), А.Пінкуса, І.Карнісера, Ш.Пена (2002) та ін.

У четвертому розділі роботи для досить широкого підкласу всіх нуле-зменшуючих послідовностей отримано негативну відповідь на питання проблеми Карліна, тобто доводено, що за певних умов не існує нуле-зменшуючих послідовностей іншого вигляду, ніж знайденого у теоремі Лагерра. Метод доведення всіх тверджень цього розділу базується на важливому факті, встановленому у лемі 4.6 [3], про те, що для кожної $\gamma \in \tau^+$ існує така міра $\mu_\gamma \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$, що

$$\gamma_n = \int_0^\infty t^n \, d\mu_\gamma(t) \ , \ n \in \mathbb{N}_0 \ , \tag{33}$$

тобто для кожної послідовності із τ^+ є розв'язною проблема моментів Стілтьєса. Це дозволяє лінійне перетворення T_γ для довільної $\gamma \in \tau^+$ записати у інтегральній формі $T_\gamma p(x) = \int_0^\infty p(xt)\, d\mu_\gamma(t)$, $p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$.

Теорема 4.4 ([16]). *Нехай $\gamma \in \tau^+$ є такою, що для довільної скінченної сукупності чисел $0 < \beta_1 \le \beta_2 \le ... \le \beta_m < \infty$, $m \ge 1$, послідовність $\{\, (\beta_1^n + \beta_2^n + ... + \beta_m^n)\, \gamma_n \,\}_{n \ge 0}$ відповідає визначеній проблемі моментів Стілтьєса. Тоді існує $\Phi \in L_2^+$ така, що $\gamma_n = \frac{\gamma_0}{\Phi(n)}$, $n \ge 0$.*

Теорема 4.4 вимагає, щоб міра μ_γ, яка відповідає $\gamma \in \tau^+$ по (33), була *однорідно визначеною* у сенсі Стілтьєса (коротко: $\mu_\gamma \in \det_{\mathrm{h}} \mathcal{S}$), тобто, щоб для всіх вказаних у цій теоремі чисел $\beta := \{\beta_k\}_{k=1}^m$ міра

$d\Gamma_\beta\mu_\gamma(x) := d\mu_\gamma(x/\beta_1) + d\mu_\gamma(x/\beta_2) + ... + d\mu_\gamma(x/\beta_m)$ була єдиним розв'язком проблеми моментів Стілтьєса: $(\beta_1^n + \beta_2^n + ... + \beta_m^n)\gamma_n = \int_0^\infty t^n\, d\Gamma_\beta\mu_\gamma(t)$, $n \in \mathbb{N}_0$. У теоремі 4.5 ([18]) доведено, що $\det\mathcal{S}\setminus \setminus\det{}_{\mathrm{h}}\mathcal{S} \neq \emptyset$, а у пункті 4.3.7 доведено, що вимога $\mu_\gamma \in \det{}_{\mathrm{h}}\mathcal{S}$ є найбільш слабкою для можливості реалізації методу доведення теореми 4.4.

Дві менш загальні умови для $\gamma \in \tau^+$, але такі, що простіше перевіряються, містяться у наступному наслідку.

Наслідок 4.1 ([16]). *Нехай $\gamma \in \tau^+$ задовольняє одну з таких умов:*

A. *Існує таке $a > 0$, що послідовність $\left\{\dfrac{\gamma_n}{n+a}\right\}_{n\geq 0}$ відповідає визначеній проблемі моментів Стілтьєса.*

B. *Виконується умова Карлемана : $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{\gamma_n^{1/2n}} = \infty$.*

Тоді існує така $\Phi \in L_2^+$, що $\gamma_n = \dfrac{\gamma_0}{\Phi(n)}$, $n \geq 0$.

У роботі також встановлено, що остаточну характеризацію можна дати спеціальному підкласу класу нуле-зменшуючих послідовностей, а саме, всіх тих $\gamma \in \tau^+$, для яких $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \gamma_n^{1/n} < \infty$.

Теорема 4.6 ([4]). *Для послідовності дійсних чисел $\gamma = \{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ такі твердження еквівалентні:*

(1) $\gamma \in \tau^+$ *і* $1/Q := \varlimsup\limits_{n\to\infty} \gamma_n^{1/n} < \infty$*;*

(2) *існує така $\Phi \in L_1(\log Q)$, що $\gamma_n = \gamma_0/\Phi(n)$, $n \geq 0$;*

(3) *для всіх $A > 0$ і $p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$ має місце $\mathbb{Z}_{[\,0,\,A\,\cdot\,Q]}(\,T_\gamma p\,) \leq \mathbb{Z}_{[\,0,\,A]}(\,p\,)$.*

Для порівняння умови (1) теореми 4.6 і умови B наслідку 4.1 на послідовність $\gamma \in \tau^+$ розглянемо порядок $\rho_{\Phi_{1/\gamma}}$ і тип $\sigma_{\Phi_{1/\gamma}}$ цілої функції $\Phi_{1/\gamma} \in L_1$, яка відповідає послідовності $\gamma \in \tau^+$ по формулі (31). У наслідку 4.5 роботи доведено, що умова B наслідку 4.1 виконується, якщо або $\rho_{\Phi_{1/\gamma}} > 1/3$, або $\rho_{\Phi_{1/\gamma}} = 1/3$ і $\sigma_{\Phi_{1/\gamma}} > 0$. З іншого боку, із умови (1) теореми 4.6 випливає набагато більше, а саме, $\rho_{\Phi_{1/\gamma}} = 1$ і $0 < \sigma_{\Phi_{1/\gamma}} < +\infty$.

Наслідками теореми 4.6 є наступні твердження, які розв'язують проблеми 8 і 9 відповідно, із статті Т.Кревена і Дж.Шордаша 1996 року (Serdica Math. J., Vol. 22, № 4, 1996).

Наслідок 4.3 ([4]). *Нехай $\Phi \in \cup_{b\in\mathbb{R}} L_1(b)$ і $p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$. Тоді послідовність $\{1/(p(n)\Phi(n))\}_{n\geq 0}$ належить τ^+ тоді і тільки тоді, коли або поліном $p(x)$ є ненульовою сталою, або всі його нулі є від'ємними.*

Теорема 4.7 ([5]). *Нехай $f(z)$ є цілою функцією експоненційного типу. Припустимо, що $\{f(k)\}_{k=0}^{\infty} \in \tau_c$, де $f(0) = 1$. Для $\theta \in [-\pi, \pi]$ нехай $h_f(\theta)$ позначає індикаторну функцію $f(z)$. Якщо $h_f(\pm\pi/2) < \pi$, то f належить класу $\cup_{b\in\mathbb{R}} L_1(b)$.*

П'ятий розділ дисертаційної роботи присвячено отриманню за допомогою поняття нормальності повного геометричного опису тих сукупностей опуклих множин, для яких алгоритм циклічних проекцій збігається рівномірно лінійно. Нехай X — дійсний віддільний локально опуклий простір, , $X^* := (X^*, \sigma(X^*, X))$ — спряжений простір, $\mathcal{N}(X)$ — сукупність всіх відкритих абсолютно опуклих околів нуля в X, $A^\circ := \{x^* \in X^* \,|\, x^*(a) \leq 1 \ \forall a \in A\}$ — поляра множини $A \subset X$ і $A^* := -A^\circ$. Підмножина $K \subset X$ називається конусом, якщо $K + K \subset K$, $\lambda K \subset K$ для всіх $\lambda \geq 0$. Кожний конус є опуклою множиною, а сукупність всіх конусів в X позначається через $\mathcal{K}(X)$. Кажуть, що пара конусів $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}(X)^2$ є нормальною парою нульового порядку, якщо

$$\forall U \in \mathcal{N}(X)\, \exists V \in \mathcal{N}(X) \,:\, (K_1 + V) \cap (K_2 + V) \subset K_1 \cap K_2 + U\,. \quad (34)$$

Множина всіх таких пар конусів позначається через A_0. Поняття нормальності конуса було введено у 1940 році М.Г.Крейном і воно співпадає з поняттям нормальності нульового порядку пари конусів (K_1, K_2) у випадку, коли ця пара складається із конуса K та йому протилежного $-K$, тобто $K_1 = K$ і $K_2 = -K$, причому $K \cap -K = \{0\}$. Г.Джеймсон у 1972 році узагальнив це поняття для довільної пари конусів.

Одною із головних рівностей субдиференційного числення є відома рівність Моро — Рокафелара, яка для індикаторних функцій конусів $K_1, K_2 \subset X$ має такий вигляд:

$$(K_1 \cap K_2)^* = K_1^* + K_2^* \,. \quad (35)$$

Рівність (35) має місце не завжди. У кандидатській дисертації автора (1987) було введено поняття нормальної пари трансфінітного порядку $0 \leq \alpha < \varpi_1$, де ϖ_1 - найменше з порядкових чисел, які перевищують всі порядкові числа другого класу, і для скінченновимірних просторів $X = \mathbb{R}^n$ було доведено два варіанти критерію справедливості рівності (35), один з яких полягає у такому. Нехай $A_* \subset \mathcal{K}(X)^2$ — множина всіх пар конусів, задовольняючих (35), а A_α — множина всіх нормальних пар конусів порядку $0 \leq \alpha < \varpi_1$. Тоді

$$A_0 \subset A_1 \subset ... \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset ... \subset A_* := \cup_{\,0\leq\alpha<\varpi_1} A_\alpha \,, \quad (36)$$

і було доведено, що в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 4$: $A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha \neq \emptyset \; \forall \, \alpha < \varpi_1$, тобто у ланцюзі включень (36) всі включення є строгими. У розділі 5 роботи доведено таке твердження.

Теорема 5.3 ([1]). *У тривимірному просторі рівність* (35) *виконується тоді і тільки тоді, коли* (K_1, K_2) *— нормальна пара нульового порядку, тобто* $A_0 = A_*$.

У 2000 році Г.Бочке, Дж.Борвейн і П.Ценг істотно підсилили твердження теореми 5.3, довівши, що у тривимірному просторі нормальність пари (K_1, K_2) нульового порядку еквівалентна так званій властивості перетину конічних оболонок:

$$\overline{\mathrm{con}(K_1 - x) \cap \mathrm{con}(K_2 - x)} = \overline{\mathrm{con}(K_1 - x)} \cap \overline{\mathrm{con}(K_2 - x)}$$

для довільних $x \in K_1 \cap K_2$, де $\mathrm{con}\, C := \cup_{\lambda \geq 0} \lambda \cdot C$ позначає конічну оболонку множини C. Ця властивість завжди випливає із нормальності пари (K_1, K_2) нульового порядку, але вже у чотиривимірному просторі з неї не випливає $(K_1, K_2) \in A_0$.

Якщо A є непустою замкненою опуклою множиною гільбертового простору H, відомий результат Рісса (1934) стверджує, що для кожного $x \in H$ існує єдина найкраща апроксимація (найближча точка) $P_A(x) \in A$ до x. Далі, нехай $d(x, A) := ||x - P_A(x)||$. Розглянемо замкнені опуклі множини $C_1, C_2, ..., C_r$ у гільбертовому просторі H з непустим перетином $C := \cap_1^r C_i \neq \emptyset$, і нехай $P_i := P_{C_i}$ для $i = 1, 2, ..., r$. Для того, щоб знайти точку в перетині множин C, застосовується так званий алгоритм циклічних проекцій (АЦП).

Починаючи з довільної точки $x \in H$, визначаємо послідовність циклічних проекцій $x_{nr} = (P_r P_{r-1} \cdots P_1)^n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$ У випадку, коли всі множини є афінними (тобто є зсувами деяких підпросторів), Дж.Ньюман у 1950 році у випадку $r = 2$ двох множин довів збіжність x_{n2} по нормі при $n \to \infty$ до найкращої апроксимації $P_C(x)$ точки x у перетині множин. Для довільного r це було доведено у 1962 році І.Гальперіним. У 1965 році Л.М.Брегман довів, що у загальному випадку опуклих замкнених множин ця послідовність $\{x_{nr}\}_{n=0}^{\infty}$ завжди збігається слабко до деякої точки $W_C(x) \in C$. У 2004 році Х.Хундал побудував приклад, коли послідовність до $W_C(x) \in C$ збігається тільки слабко, але не по нормі, а також побудував на площині приклад, коли $W_C(x) \neq P_C(x)$.

Говорять, що АЦП для сукупності множин $C_1, C_2, ..., C_r$ збігається рівномірно лінійно, якщо існує така константа $\theta \in (0, 1)$, що

$$||(P_{C_r} P_{C_r} \cdots (P_{C_1})^n(x) - W_C(x)|| \leq ||x - W_C(x)||\theta^n \;\; \forall x \in H \, , \, n \in \mathbb{N}_0 \, .$$

У 1996 році математики Г.Бочке і Дж.Борвейн ввели нове поняття лінійної регулярності для скінченної сукупності опуклих множин і встановили, що ця умова є достатньою для рівномірної лінійної збіжності АЦП. У 2008 році була опублікована стаття Ф.Дойча і Х.Хундала, де вони встановили необхідність цих умов.

Теорема Дойча — Хундала. *Нехай H є гільбертовим простором, B_H позначає відкриту одиничну кулю у ньому і C_1, C_2, ..., C_m є замкненими опуклими множинами з непустим перетином C. Наступні твердження еквівалентні:*
(1) *АЦП для $\{C_1, C_2, ...C_m\}$ збігається рівномірно лінійно;*
(2) *$\{C_1, \ldots, C_m\}$ мають властивість лінійної регулярності, тобто існує така константа $\gamma > 0$, що $d\,(x, C) \leq \gamma \max_{1\leq i\leq m} d(x, C_i)$ для довільного $x \in H$.*

В інших теоремах цієї роботи Дойча — Хундала до характеризації поняття лінійної регулярності скінченної сукупності опуклих множин було застосовано головні результати спільної з Ф.Дойчем і В.Лі роботи автора [13], де поняття лінійної регулярності було повністю охарактеризовано за допомогою поняття нормальності по М.Г.Крейну. Головний результат п'ятого розділу, сформульований у теоремі 5.13, можна переформулювати у такому вигляді.

Теорема 5.13 ([13]). *Нехай $C_1, \ldots, C_m$ є замкненими опуклими підмножинами гільбертового простору H, B_H позначає відкриту одиничну кулю у ньому і $C := \cap_1^m C_i \neq \emptyset$. Наступні твердження еквівалентні:*
(1) *$\{C_1, \ldots, C_m\}$ мають властивість лінійної регулярності, тобто існує така константа $\gamma > 0$, що*

$$d\,(x, C) \leq \gamma \max_{1\leq i\leq m} d(x, C_i) \qquad \text{для довільного } x \in H.$$

(2) *Існує така додатна стала $\varepsilon > 0$, що*

$$\cap_{i=1}^m (C_i + \eta\varepsilon B_H) \subset (\cap_{i=1}^m C_i) + \eta B_H \text{ для довільного } \eta > 0.$$

(3) *Існує така додатна константа γ, що*

$$\bigcap_1^m \left(\mathrm{con}(C_i - x) + \frac{1}{\gamma} B_H \right) \subset \mathrm{con}(C - x) + B_H \text{ для довільного } x \in C\ .$$

З урахуванням теореми Дойча — Хундала друга і третя умови цієї теореми дають геометричний опис необхідної і достатньої умови рівномірно лінійної збіжності алгоритму циклічних проекцій для сукупності опуклих множин $\{C_1, \dots, C_m\}$. Причому третя умова цієї теореми виражає той несподіваний факт, що властивість сукупності опуклих множин $\{C_1, \dots, C_m\}$ можна описати за допомогою відповідної властивості системи конусів допустимих напрямків $\{\mathrm{con}(C_1 - x), \dots, \mathrm{con}(C_m - x)\}$, коли x бігає по $\cap_1^m C_i$.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином.

Посилена властивість нещільності Л.де Бранжа, яка випливає з його теореми, і одержано поліноміальний вигляд цієї теореми. Доведено, що випливаюча з теореми Л.де Бранжа властивість нещільності вже не є справедливою у просторах $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, $2 \le p < \infty$, для мір μ з достатньо щільним носієм.

Знайдено аналітичні зображення тих мір μ, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у просторі $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ для даного або для всіх $0 < p < \infty$, відповідно. Як наслідок цих результатів, знайдені аналітичні зображення тих мір μ, які однозначно визначаються своїми моментами на всій осі або на додатній півосі.

Для довільної невизначеної дискретної міри знайдено явну формулу визначення, чи є вона n-канонічною, і якщо є, то чому дорівнює число n. Завершено дослідження опису всіх можливих елементів матриць Неванлінни, які відповідають невизначеним проблемам моментів по формулі Неванлінни.

Отримано аналоги другого критерію Г.Гамбургера визначеності проблеми моментів для поліноміальної щільності у просторах $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ і C_w^0, відповідно. За допомогою повного опису поповнення напівнормованого простіру C_w^0 одержано істотне доповнення до теореми С.М.Мергеляна для випадку, коли алгебраїчні многочлени є щільними у напівнормованому просторі C_w^0.

Знайдено модифіковану форму теореми Л. де Бранжа для випадку, коли алгебраїчні поліноми є щільними у всіх просторах $C_{w^\rho}^0$, $0 < \rho < \infty$, одночасно, а також знайдено аналітичні зображення тих мір, які задовольняють умову Карлемана.

Встановлено мажорувальні властивості тих ваг і мір, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у просторах C_w^0 або $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, але не є такими у просторах $C_{w^\theta}^0$ чи $L_{p+\theta}(\mathbb{R}, d\mu)$ при довільному $\theta \in (0, 1)$ і фіксованому $1 \le p < \infty$, відповідно.

Одержано нові необхідні і достатні умови розвинення оберненої величини цілої функції тільки з простими нулями у абсолютно збіжний ряд простих дробів.

Доведено щільність алгебраїчних поліномів у просторі Харді $H^p(\mathcal{S})$ на смузі $\mathcal{S}$ комплексної площини для довільного $0 < p < \infty$. Отримано зручний внутрішній опис просторів $H^p(\mathcal{S})$ і знайдено у явному вигляді ізоморфізм між просторами $H^p(\mathcal{S})$ і $H^p_\tau(\mathcal{S})$.

Одержано розв'язок проблеми Карліна для нуле-зменшуючих послідовностей, які відповідають однорідно визначеним проблемам моментів Стілтьєса. Розв'язано дві проблеми про інтерполяцію нуле-зменшуючих послідовностей, які було поставлено у 1996 році Т.Кревеном і Дж.Шордашем.

Встановлено особливість властивості тривимірності евклідового простору для умов справедливості рівності Моро-Рокафеллара і за допомогою поняття нормальності знайдено повний геометричний опис тих сукупностей опуклих множин, для яких алгоритм циклічних проекцій збігається рівномірно лінійно.

Список опублікованих праць за темою дисертації:

[1] Бакан А.Г. Нормальные пары конусов в конечномерных пространствах / А.Г. Бакан // Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложения. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1988. — С. 4 — 11.

[2] Бакан А.Г. Некоторые отрицательные результаты о последовательностях множителей первого рода / А.Г. Бакан, А.П. Голуб // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, № 3. — С. 305-309.

[3] Бакан А.Г. О последовательностях, не увеличивающих количества действительных корней многочленов / А.Г. Бакан, А.П. Голуб // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 45, № 10. — С. 1323-1330.

[4] Bakan A. Weakly increasing zero-diminishing sequences/ A. Bakan, T. Craven, G. Csordas , A. Golub // Serdica. — 1996. — Vol.22. — P. 547—570.

[5] Bakan A. Interpolation and the Laguerre — Pólya class / A. Bakan, T. Craven , G. Csordas // Electronic Journal: Southwest J. Pure Appl. Math. — 2001. — Vol. 1. — P. 38-53. — Режим доступу до журн.: http://rattler.cameron.edu/swjpam.html.

[6] Bakan A.G. Codimension of polynomial subspace in $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ for discrete indeterminate measure μ / A.G. Bakan // Proc. Amer. Math. Soc. — 2002. — Vol. 130, № 12. — P. 3545-3553.

[7] Bakan A. On the existence of generalized Pólya frequency functions corresponding to entire functions with zeros in angular sectors / A. Bakan, St. Ruscheweyh // Complex Var. Theory Appl. — 2002. — Vol. 47, № 7. — P. 565-576.

[8] Бакан А.Г. Критерий полиномиальной плотности и общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве C_w^0 / А.Г. Бакан // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 5. — С. 610-622.

[9] Бакан А.Г. Критерий плотности алгебраических полиномов в пространствах L_p, $1 \leq p < \infty$ / А.Г. Бакан // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 5. — С. 701-705.

[10] Бакан А.Г. Полиномиальный вид условий Луи де Бранжа плотности алгебраических многочленов в пространстве C_w^0 / А.Г. Бакан // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 3. — С. 305-319.

[11] Бакан А.Г. Дополнение к теореме С.Н.Мергеляна о плотности алгебраических многочленов в пространстве C_w^0 / А.Г. Бакан // Укр. мат. журн. — 2005. — 57, № 7. — С. 867-878.

[12] Bakan A. Representation of measures with simultaneous polynomial denseness in $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, $1 \leq p < \infty$ / A. Bakan, St. Ruscheweyh // Arkiv für matematik. — 2005. — Vol. 43. — P. 221-249.

[13] Bakan A. Strong CHIP, normality, and linear regularity of convex sets / A. Bakan, F. Deutsch , W. Li // Trans. Amer. Math. Soc. — 2005. — Vol. 357. — P. 3831–3863.

[14] Bakan A. Hardy spaces for the strip / A. Bakan, St. Kaijser // J. Math. Anal. and Appl. — 2007. — Vol. 333. — P. 347-364.

[15] Bakan A. Majorization of regular measures and weights with finite and positive critical exponent / A. Bakan, St. Ruscheweyh // J. Math. Anal. and Appl. — 2008. — Vol. 339. - P. 197-216.

[16] Bakan A. Solution of the Karlin problem for zero-diminishing sequences satisfying a Carleman condition / A. Bakan, St. Ruscheweyh // Proc. Amer. Math. Soc. — 2008. — Vol. 136, № 8. — P. 2665-2674.

[17] Bakan A. Representation of measures with polynomial denseness in $L_p(\mathbb{R}, d\mu), 0 < p < \infty$, and its application to determinate moment problems / A. Bakan // Proc. Amer. Math. Soc. — 2008. — Vol. 136, № 10. — P. 3579-3589.

[18] Бакан А.Г. Различие между определенными и однородно определенными мерами на положительной полуоси / А.Г. Бакан // Теорія наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — Т. 5, № 1. — С.23-29.

[19] Бакан А.Г. Описание множеств элементов неванлинновских матриц, соответствующих неопределенным проблемам моментов / А.Г. Бакан // Теорія операторів, диференціальні рівняння і теорія функцій : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — Т.6, № 1. — С. 51 — 63.

[20] Бакан А.Г. Разложение обратной величины целой функции на простые дроби / А.Г. Бакан // Доповіді НАН України. — 2009. — № 2. — С. 11-13.

[21] Бакан А.Г. О полноте алгебраических полиномов в пространствах $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ / А.Г. Бакан // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 3. — С. 291-301.

[22] Бакан А.Г., Субдифференциал суммы двух индикаторных функций выпуклых конусов в трехмерном пространстве / А.Г. Бакан // Тезисы докладов Всесоюзной школы "Теория приближения функций"(Луцк, 31 августа — 8 сентября, 1989 г.). — Киев, Ин-т математики АН УССР, 1989. — С.12.

[23] Bakan A. G. Polynomial Approximation in $L_p(R^1, d\mu)$I: Preprint/ A.G. Bakan / Nat. Acad. Sci. of Ukraine, Inst. of Math. №7. — Kiev: 1998. — 45 p.

[24] Bakan A.G., Polynomial approximation in $L_p(R^1, d\mu)$ / A.G. Bakan // Тези доповідей Міжнародної конф. з теорії наближення та її застосувань, присвяченої пам'яті В.К.Дзядика. — Київ, Ін-т математики НАН України, 1999. — С. 13.

[25] Bakan A.G. Polynomial density in $L_p(R^1, d\mu)$ and representation of all those measures which generate a determinate Hamburger moment problem / A.G. Bakan // Contributed Talks, 5th Intern. Conf. on Approx. and Optimiz. in the Caribbean, March 29 — April 2, 1999. — Depart. de Math. et Informat., Pointe a Pitre, Guadeloupe, France, 1999. — P. 12.

[26] Bakan A.G. Polynomial density in $L_p(R^1, d\mu)$ and representation of all those measures which generate a determinate Hamburger moment problem / A.G. Bakan // Lite Mat. — 1999. — v.16. — Linkopings Univ. — P. 2.

[27] Bakan A.G. Polynomial density in L_p-spaces and representation of all those measures which generate a determinate Hamburger moment problem / A.G. Bakan // Mat-Nyt. — April 1999, Den 20. — № 991. — Kobenhavn Univ. — P. 1.

[28] Bakan A.G. Polynomial density in $L_p(R^1, d\mu)$ and representation of all measures which generate a determinate Hamburger moment problem / A.G. Bakan // Approximation, Optimization

and Mathematical Economics (Pointe-a-Pitre, 1999), Marc Lassonde ed. — Physica-Verlag, Heidelberg, 2001. — P. 37-46.

[29] Bakan A.G. Representation of measures with simultaneous polynomial denseness in all L_p-spaces / A.G. Bakan // Lite Mat. — 2005. — v.49. — Linkopings Univ. — P. 1.

[30] Bakan A.G. Representation of measures with simultaneous polynomial denseness in all $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, $1 \le p < \infty$ / A.G. Bakan // Bullen. — 2005. — № 1004. — Uppsala Univ. — P. 1.

[31] Бакан А.Г. Полиномиальная плотность в $L_p(\mathbb{R}^1, d\mu)$, $0 < p < \infty$ / А.Г. Бакан // Functional methods in approximation theory and operator theory III: FM 2009 conference, dedicated to the memory of V.K.Dzyaduk, August 22-26, 2009.: Abstracts. — Київ, Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 20-21.

АНОТАЦІЇ

Бакан А.Г. Поліноміальна апроксимація на дійсній осі, проблема Карліна та нормальність опуклих множин. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2010.

У дисертації одержано аналітичні зображення тих борелівських мір μ на дійсній осі, для яких алгебраїчні поліноми є щільними у просторі $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ для даного або для всіх $0 < p < \infty$, а також тих мір, моменти яких породжують визначені класичні проблеми моментів Г.Гамбургера або Т.Стілтьєса. Частково розв'язана проблема Карліна про нуле-зменшуючі послідовності і за допомогою поняття нормальності отримано повний геометричний опис тих сукупностей опуклих множин, для яких алгоритм циклічних проекцій збігається рівномірно лінійно. Встановлено нові характеристичні властивості n-канонічних мір і дано остаточний опис елементів тих матриць Неванлінни, які відповідають невизначеним проблемам моментів. Отримано аналоги критерію Г.Гамбургера визначеності проблеми моментів для поліноміальної щільності у просторах C_w^0 і $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ та дано остаточний опис поповнення простору C_w^0. Доведено щільність алгебраїчних поліномів у просторі Харді на смузі комплексної площини. Одержані нові необхідні і достатні умови розвинення оберненої величини цілої функції тільки з простими нулями у абсолютно збіжний ряд простих дробів.

Ключові слова: проблеми моментів, апроксимація поліномами, простори вимірних функцій, нуле-зменшуючі послідовності, лінійна регулярність, властивість нормальності, алгоритм циклічних проекцій, цілі і мероморфні функції, H^p-класи.

Бакан А.Г. Полиномиальная аппроксимация на вещественной оси, проблема Карлина и нормальность выпуклых множеств. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2010.

В диссертационной работе получены аналитические представления тех борелевских мер μ на вещественной оси, для которых алгебраические полиномы плотны в пространстве $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ для данного или для всех $0 < p < \infty$ одновременно, а также тех мер, моменты которых порождают определенные классические проблемы моментов Г.Гамбургера или Т.Стилтьеса.

Частично решена проблема Карлина о нуле-уменьшающих последовательностях. Вопрос С.Карлина 1968 года о справедливости обратной импликации в теореме Е.Лагерра 1884 года о нуле-уменьшающих последовательностях получил название проблемы Карлина. Окончательное решение этой проблемы было получено, в частности, для всех тех нуле-уменьшающих последовательностей, которые удовлетворяют известному в теории моментов условию Карлемана.

В 1996 году математики Г.Бочке і Дж.Борвейн ввели новое понятие линейной регулярности конечного набора выпуклых множеств и показали, что это свойство является достаточным для быстрой сходимости алгоритма циклических проекций, а именно, для так называемой его равномерной линейной сходимости. В 2008 году Ф.Дойч и Х.Хундал доказали необходимость этого условия. В диссертации дана полная геометрическая характеризация линейной регулярности конечного набора выпуклых множеств при помощи свойства нормальности как самих выпуклых множеств, так и системы конусов допустимых направлений, которую они порождают. Понятие нормальности выпуклого конуса было введено М.Г.Крейном в 1940 году, конечного набора выпуклых конусов — в 1972 году Г.Джеймсоном, и далее это понятие было существенно развито в кандидатской диссертации автора для описания условий справедливости равенства Моро — Рокафеллара.

В данной работе для произвольной неопределенной дискретной меры μ указана явная формула, позволяющая определить коразмерность подпространства алгебраических многочленов в пространстве $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$. Получен аналог критерия Г.Гамбургера определенности проблемы моментов для полиномиальной плотности в пространствах C_w^0 и $L_p\,(\mathbb{R}, d\mu)$. При помощи полного описания пополнения полунормированного пространства C_w^0 найдено существенное дополнение к известной теореме С.Н.Мергеляна о пространствах C_w^0 в случае, когда алгебраические многочлены плотны в C_w^0. Дано окончательное описание всех возможных элементов тех матриц Неванлинны, которые соответствуют неопределенным проблемам моментам по известной формуле Неванлинны. Найдено внутреннее описание пространств Харди в полосе комплексной плоскости и доказана плотность алгебраических многочленов в этих пространствах. Получены новые необходимые и достаточные условия разложения обратной величины целой функции только с простыми нулями в абсолютно сходящийся ряд простых дробей.

Ключевые слова: проблемы моментов, аппроксимация полиномами, пространства измеримых функций, нуле-уменьшающие последовательности, линейная регулярность, свойство нормальности, алгоритм циклических проекций, целые и мероморфные функции, H^p-классы.

Bakan A.G. Polynomial approximation on the real axis, Karlin's problem and normality of convex sets. — Manuscript.

Thesis for Doctor of Physico-Mathematical Sciences academic degree on the speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2010.

Analytical representations of Borel measures μ on the real line for which algebraic polynomials are dense in the space $L_p\,(\mathbb{R}, d\mu)$ either for given or for all $0 < p < \infty$ have been found in thesis as well as analytical representations of those measures that are determinate in the sense of H.Hamburger or T.Stieltjes. S.Karlin's problem about zero-diminishing sequences has been partly solved. With the help of the normal property it has been obtained a complete geometrical description of finitely many convex sets for which cyclic projection algorithm converges uniformly linearly. Final description of all possible elements in Nevanlinna matrices associated with indeterminate moment problems and new characteristic properties of n-canonical measures have been established. Hamburger's criterion for determinancy of a moment problem has been extended to criterions for polynomial density in the spaces C_w^0 and $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$. Completion of the space C_w^0 has been completely described. Denseness of algebraic polynomials in Hardy spaces of analytic functions in a strip has been proved. New sufficient and necessary conditions for the reciprocal of an entire function with simple zeros only to be presented in the form of an absolutely convergent series of primary fractions have been obtained.

Key words: moment problems, approximation by polynomials, spaces of measurable functions, zero-diminishing sequences, linear regularity, normal property, cyclic projection algorithm, entire and meromorphic functions, H^p-classes.

Підписано до друку 10.11.2009. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,5. Умов. друк. арк. 2,3.
Тираж 130 пр. Зам. 152. Безкоштовно.

Інститут математики НАН України,
01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.